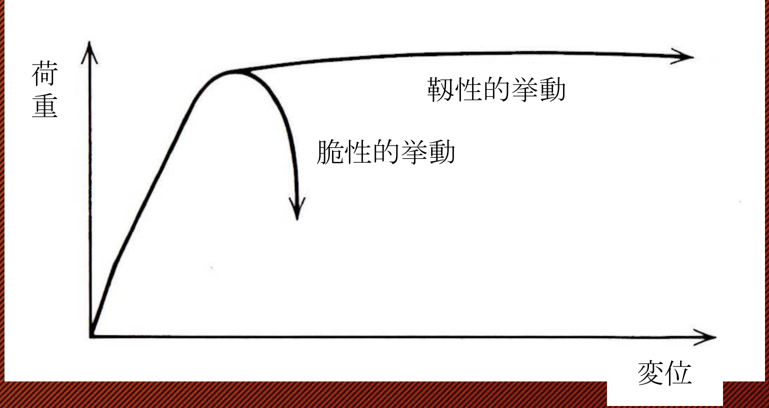
7.曲げ部材の変形と靱性

荷重－変形特性を考える必要性（1）

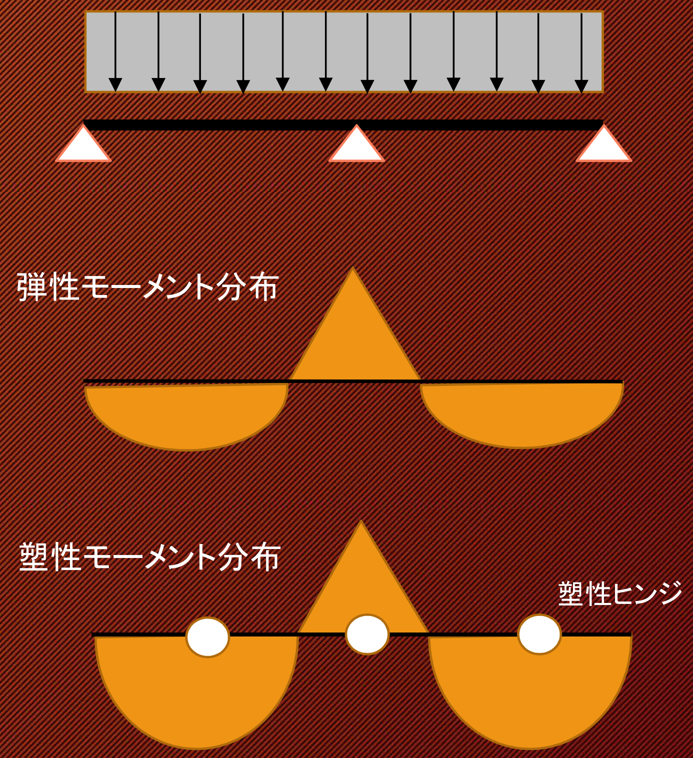
- 脆性破壊は起こすべきでない

最大荷重を保持しつつ大変形に持ちこたえるなら、破壊への警告になるとともに全体崩壊を避けることができる



荷重ー変形特性を考える必要性(2)

- 不静定構造物の設計
- モーメント再配分が可能であるなら、線形弾性状態とは異なる曲げモーメント分布になる
- モーメント強度に達する断面で塑性回転が可能ならモーメント強度は保持され、他の断面がモーメント強度に達するまで荷重は漸増
- 塑性ヒンジが十分形成され崩壊形に達した時、構造物は最大荷重に達する



荷重－変形特性を考える必要性（3）

- 地震荷重に対する構造物の靭性
- 非弾性域でのエネルギー吸収、逸散に期待
- 粘り強く挙動する構造物で崩壊が避けられるなら、さらに大きな地震荷重に対して設計できる

一様なモーメントと軸力が作用する微小要素

■変形を受けた際の曲率半径：R

■回転角

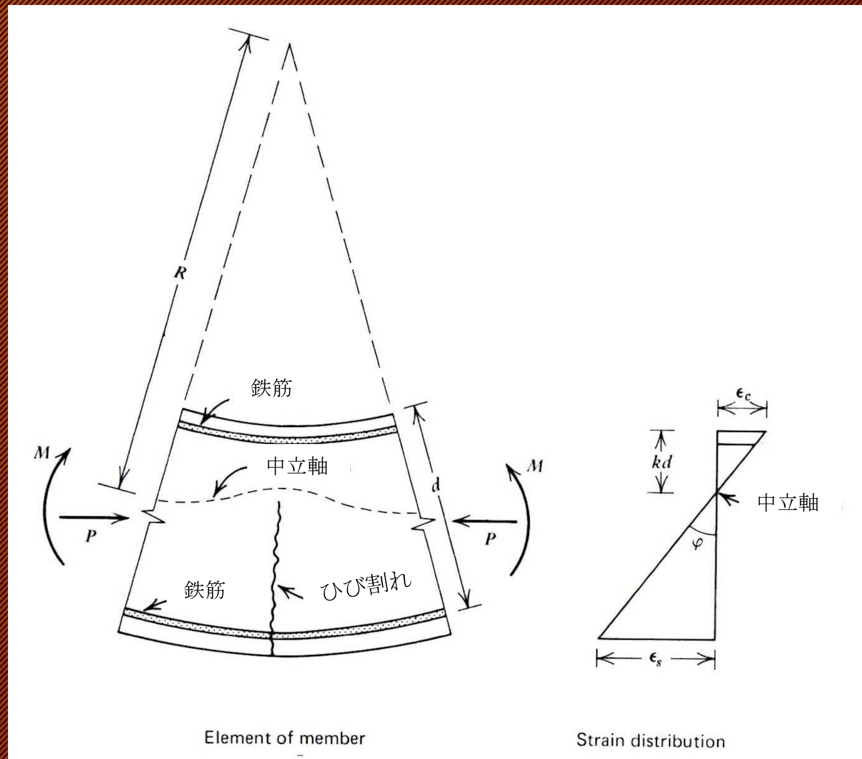
$$\frac{dx}{R}=\frac{\varepsilon_C dx}{kd}=\frac{\varepsilon_S dx}{d(1-k)}$$

■曲率

上式より

$$\varphi=\frac{1}{R}=\frac{\varepsilon_C}{kd}=\frac{\varepsilon_S}{d(1-k)}=\frac{\varepsilon_C+\varepsilon_S}{d}$$

曲率φは微小要素のひずみ分布勾配となる



モーメントと曲率の関係

■(a)曲げ引張破壊断面

・鉄筋降伏点まではほぼ線形の$M-\varphi$関係

・鉄筋降伏後曲率が急増

・断面内アーム長（引張、圧縮合力間距離）の増加に応じてモーメント漸増

・最大点到達後減少

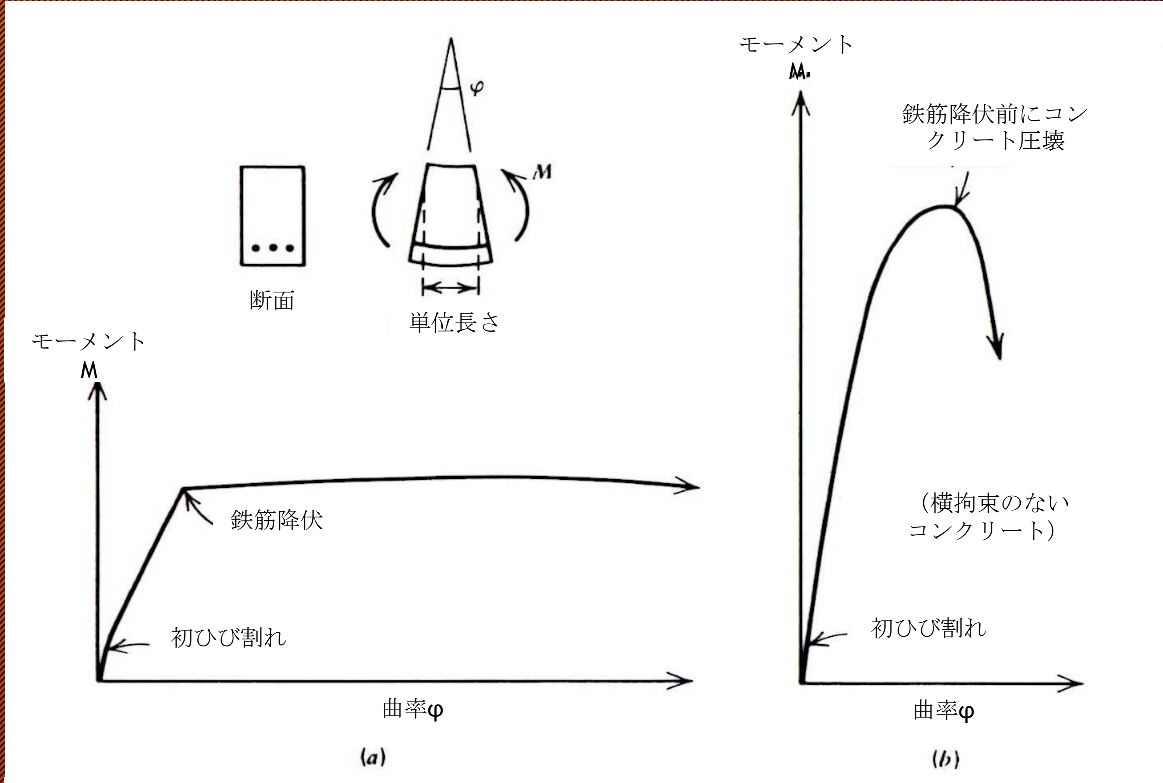
■(b)曲げ圧縮破壊断面

・鉄筋降伏以前の小さい曲率で圧壊

・モーメント耐力は急激に減少

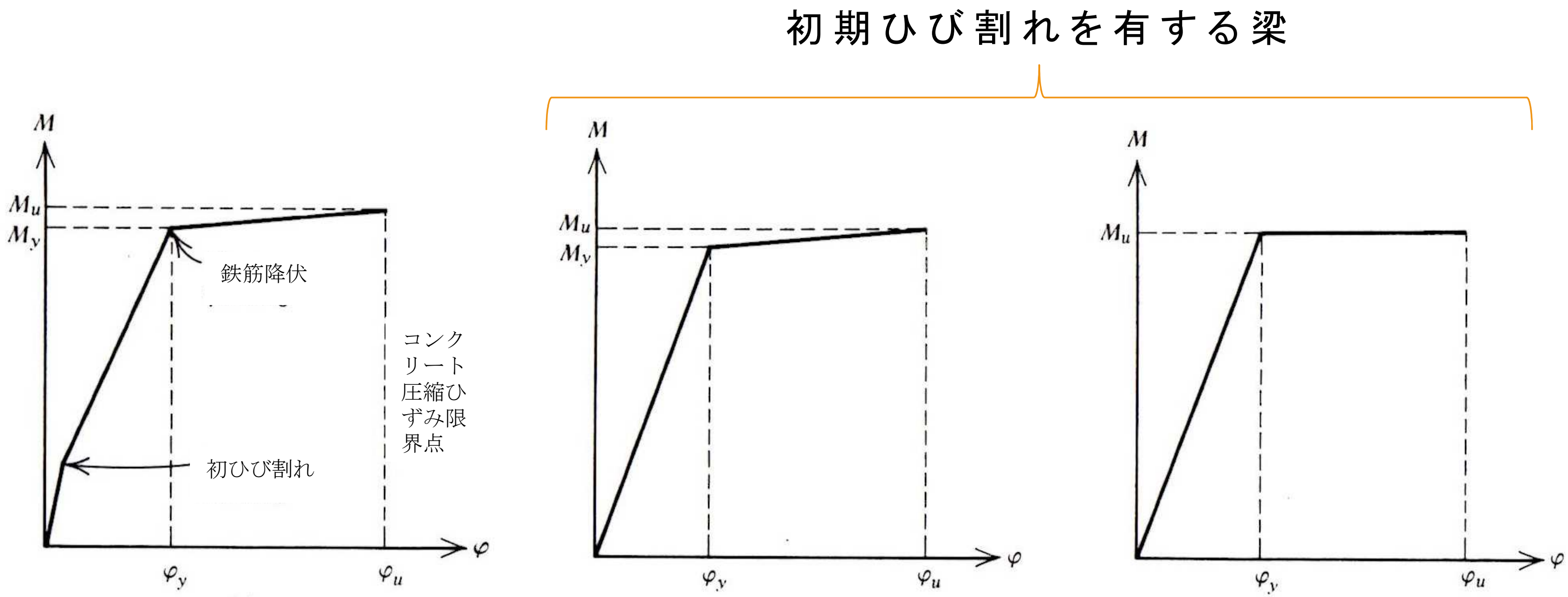
■弾性時のモーメント曲率関係

$$M = EI\varphi$$



(a) 曲げ引張破壊の断面 ($\rho < \rho_b$)、(b) 曲げ圧縮破壊の断面 ($\rho > \rho_b$)

曲げ引張破壊する単鉄筋断面のモーメントー曲率関係モデル



(a)トリリニアーモデル

(b)バイリニアーモデル（降伏後硬化）

(c)バイリニアーモデル（降伏後完全塑性）

モーメント-曲率関係の理論モデル

モーメント強度算定の際と同様の仮定

- 曲げ変形前の平面は変形後も平面を保つ
- コンクリートおよび鉄筋の応力ーひずみ関係は既知
- 力の釣合い条件

モーメントー曲率関係の計算

最外縁コンクリートひずみε_{cm}と中立軸深さkdが与えられれば

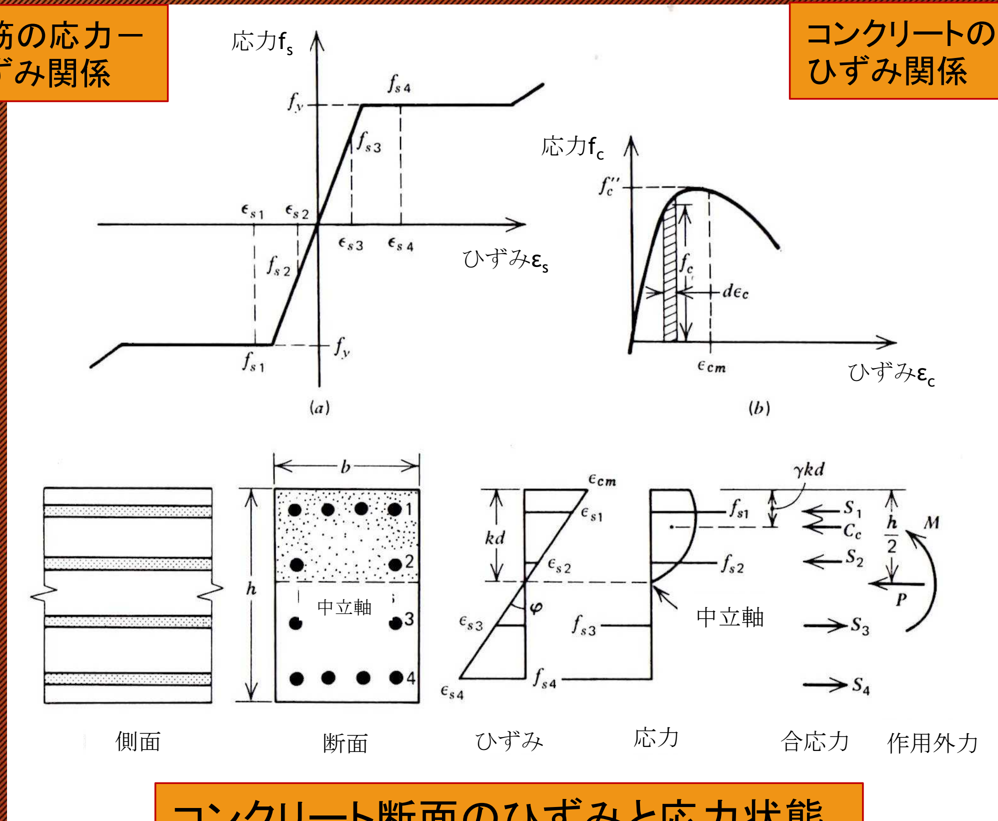
↓

鉄筋ひずみε_{s1}、ε_{s2}、ε_{s3}---はひずみの3角形状分布より決定

$$\varepsilon_{si} = \varepsilon_{cm}\frac{kd - d_i}{kd}$$

鉄筋の応力ーひずみ関係

コンクリートの応力ーひずみ関係



コンクリート断面のひずみと応力状態

鉄筋の負担力

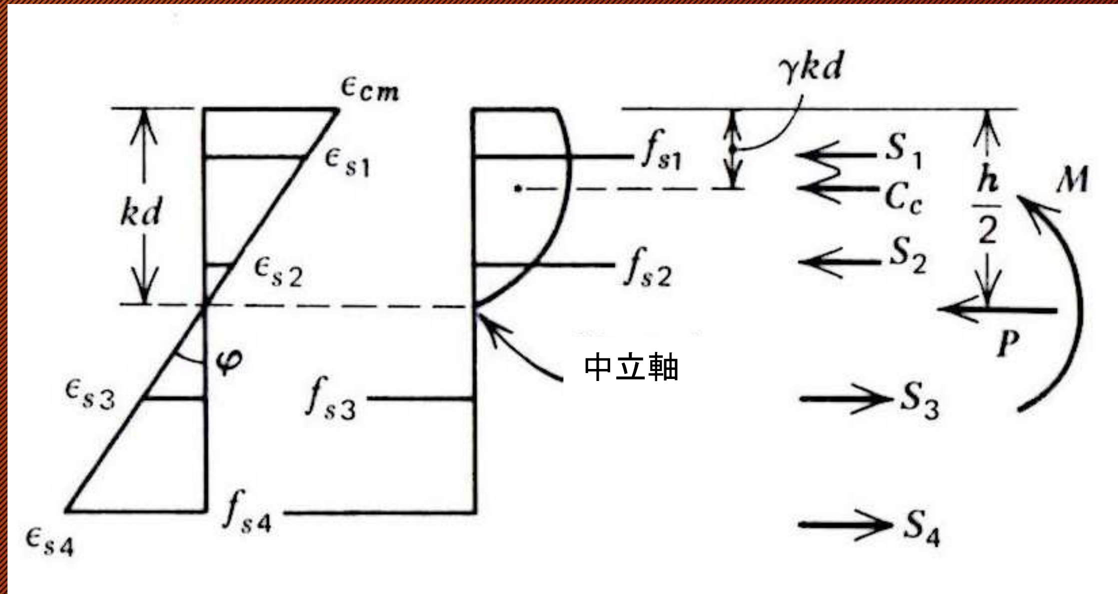
■鉄筋のひずみ:

$$\varepsilon_{si} = \varepsilon_{cm}\frac{kd-d_i}{kd}$$

■鉄筋の負担力:

$$S_i = f_{si}A_{si} \quad = E_s\varepsilon_{si}A_{si}\text{(弾性)}$$

$$= f_y A_{si}\text{(降伏時)}$$



コンクリートの負担力(1)ー平均応力係数 α

長方形断面を対象に～

■圧縮合力

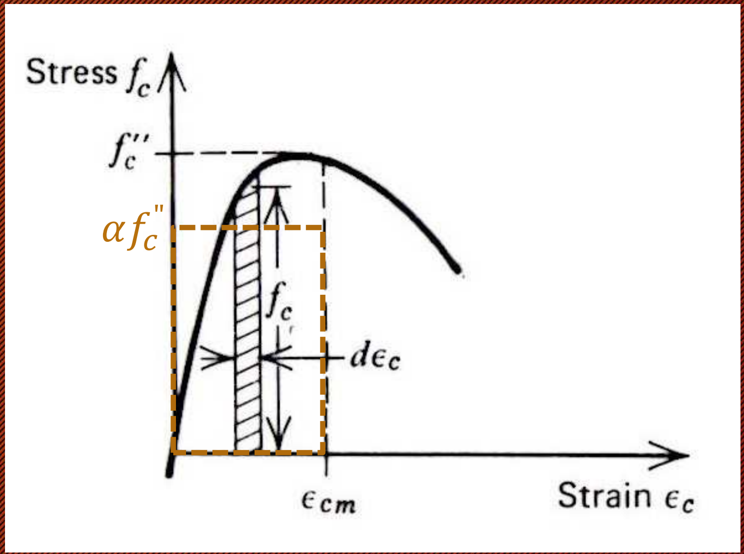
$C_c = \alpha f_c^{"} bkd$

ここに、平均応力係数 α:平均圧縮応力の部材内圧縮強度$f_c^{"}$に対する比

■ αを応力ーひずみ曲線の面積から求める

$\int_0^{\varepsilon_{cm}} f_c \, d\varepsilon_c = \alpha f_c^{"} \varepsilon_{cm}$

$\therefore \quad \alpha = \dfrac{\int_0^{\varepsilon_{cm}} f_c d\varepsilon_c}{f_c^{"} \varepsilon_{cm}}$



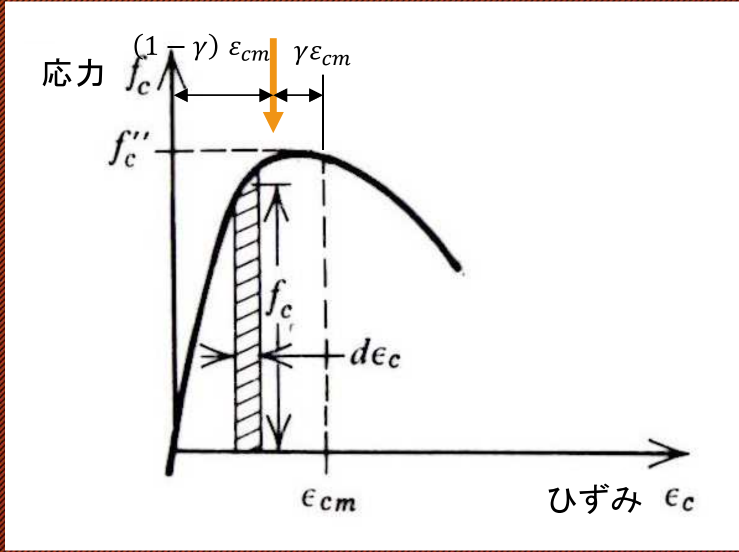
コンクリートの負担力(2)ー合力作用位置係数γ

■応力ーひずみ曲線の原点周りの1次モーメント

$$\int_0^{\varepsilon_{cm}} f_c \varepsilon_c \, d\varepsilon_c = (1-\gamma)\varepsilon_{cm} \int_0^{\varepsilon_{cm}} f_c \, d\varepsilon_c$$

$$\frac{\int_0^{\varepsilon_{cm}} f_c \varepsilon_c d\varepsilon_c}{\varepsilon_{cm} \int_0^{\varepsilon_{cm}} f_c d\varepsilon_c} = (1-\gamma)$$

$$\therefore \quad \gamma = 1 - \frac{\int_0^{\varepsilon_{cm}} f_c \varepsilon_c d\varepsilon_c}{\varepsilon_{cm} \int_0^{\varepsilon_{cm}} f_c d\varepsilon_c}$$



力の釣合い式ーモーメントと曲率

■軸力：

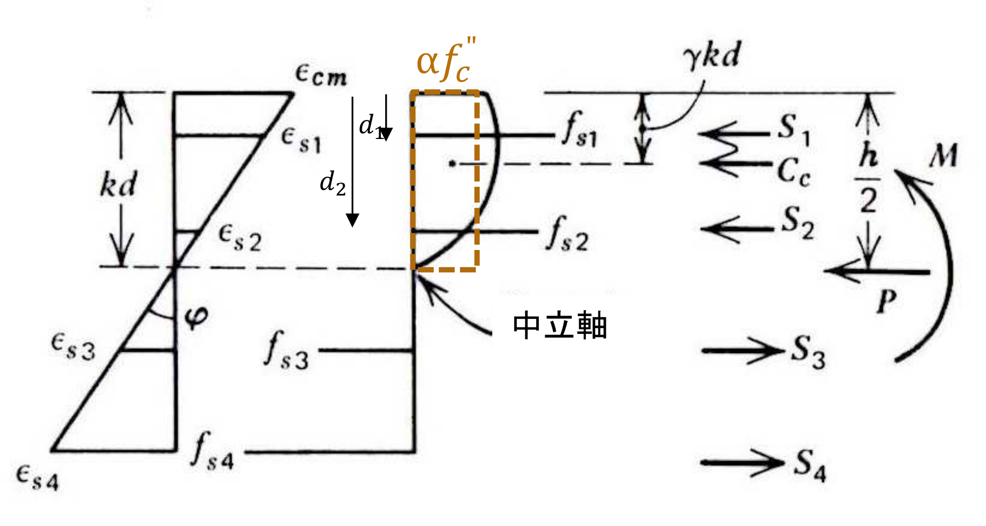
$$P = \alpha f_c^{"} bkd + \sum_{i=1}^{n} f_{si} A_{si}$$

■モーメント：

$$M = \alpha f_c^{"} bkd\left(\frac{h}{2} - \gamma kd\right) + \sum_{i=1}^{n} f_{si} A_{si} \left(\frac{h}{2} - d_i\right)$$

■曲率

$$\varphi = \frac{\varepsilon_{cm}}{kd}$$



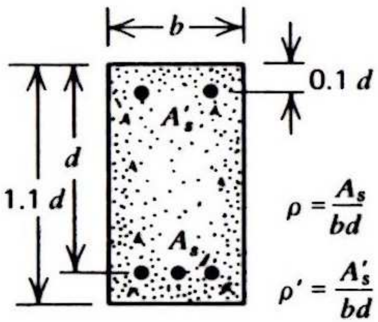
一定軸力下でのモーメントー曲率関係の計算法

■圧縮最外縁ひずみε_{cm}を漸増させ、軸方向力の釣合いを満足する中立軸深さkdを求める

（kdを未知数とする式は一般に高次方程式になるが、高次方程式を数値計算によって解くのは容易）

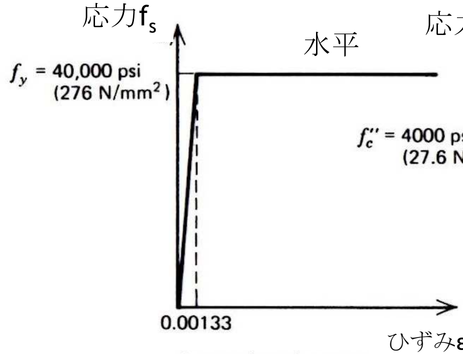
モーメントー曲率関係の計算例

断面と応力ーひずみ関係モデル

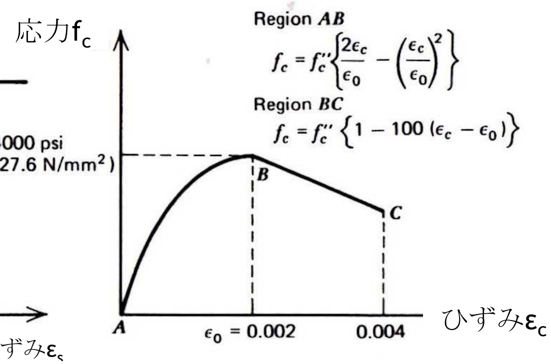


断面

梁	ρ	ρ'
1	0.0375	0.0250
2	0.0375	0.0125
3	0.0375	0
4	0.0250	0.0125
5	0.0250	0
6	0.0125	0.0125
7	0.0125	0



鉄筋応力ーひずみ曲線



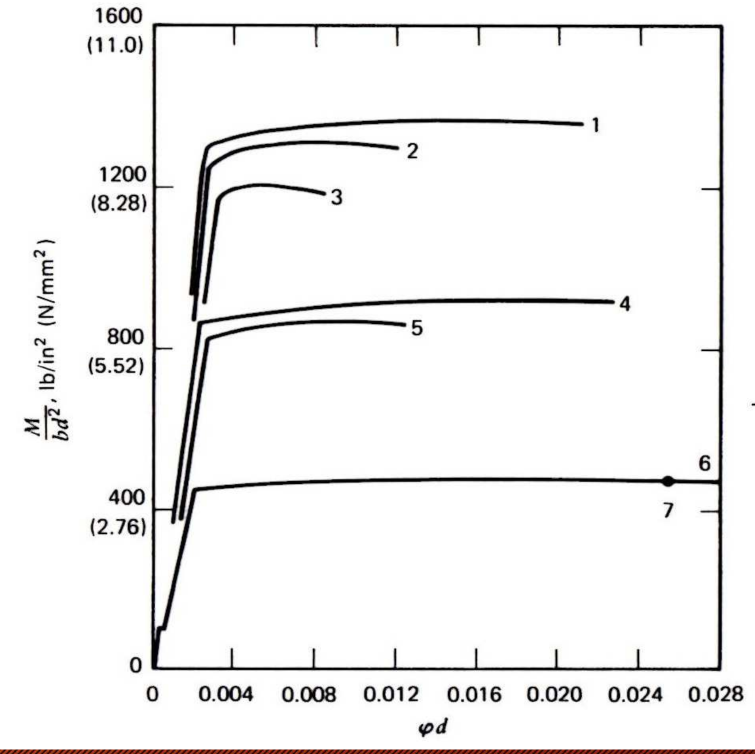
コンクリート応力ーひずみ曲線

モーメントー曲率関係の計算結果

コンクリート圧縮最外縁ひずみが0.004に達するまで計算

■圧縮鉄筋量のモーメント強度への寄与は少ない

■靭性は、引張鉄筋量が増加するとともに減少し、そして圧縮鉄筋の存在により増大する



Beam	ρ	ρ'
1	0.0375	0.0250
2	0.0375	0.0125
3	0.0375	0
4	0.0250	0.0125
5	0.0250	0
6	0.0125	0.0125
7	0.0125	0

横拘束筋のない梁断面の靱性

降伏時のモーメントと曲率

■中立軸深さkを弾性式（直線関係）を用いて求める（コンクリートの応力ーひずみ関係は$0.7f_c'$まではほぼ線形）

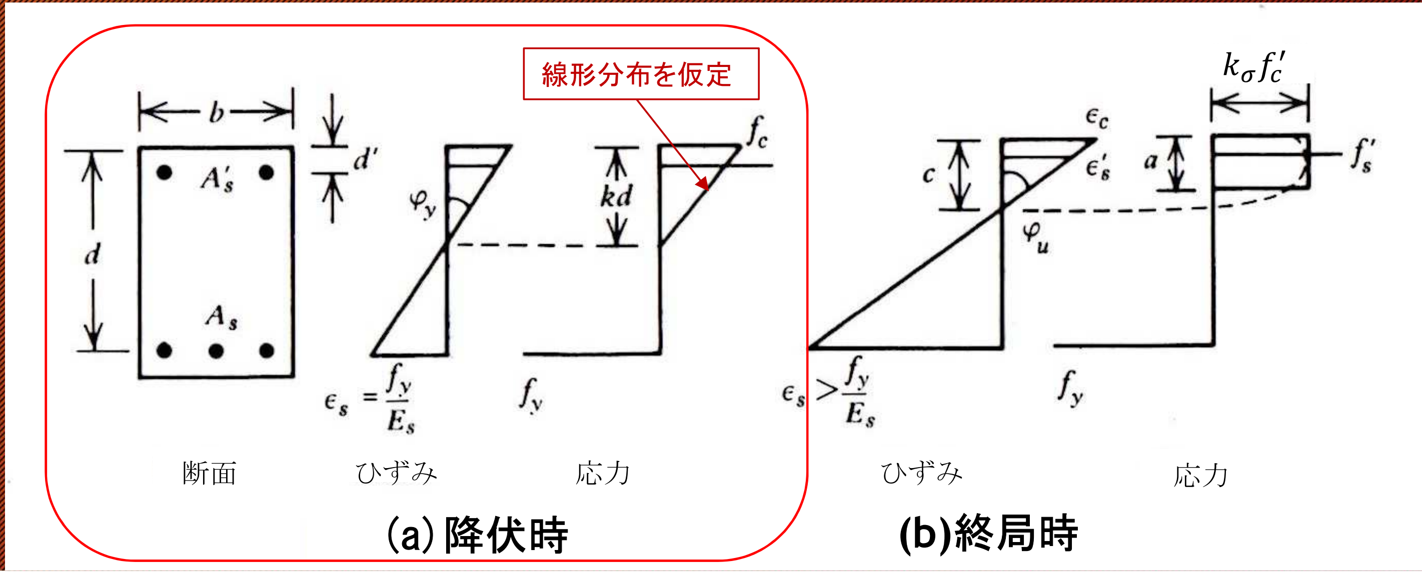
$$k=\sqrt{(\rho'+\rho)^2n^2+2(\rho'd'/d+\rho)n}-(\rho'+\rho)n$$

■降伏モーメント

$$M_y=A_sf_yjd$$

■降伏曲率

$$\varphi_y=\frac{f_y/E_s}{d(1-k)}$$



補足資料: $k=\sqrt{(\rho'+\rho)^2n^2+2(\rho'd'/d+\rho)n}-(\rho'+\rho)n$ の誘導(1)

コンクリートと鉄筋のひずみは、

$\varepsilon_c=\dfrac{f_c}{E_c},\qquad \varepsilon_s'=\dfrac{f_s'}{E_s},\qquad \varepsilon_s=\dfrac{f_s}{E_s}$

ここに、E_c:コンクリートの弾性係数、E_s:鉄筋の弾性係数

ひずみの3角形状分布より、

$$\frac{\varepsilon_c}{kd}=\frac{\varepsilon_s'}{kd-d'}=\frac{\varepsilon_s}{d-kd} \qquad \text{(a)}$$

ε_s'とε_sはε_cで表すと、

$$\varepsilon_s'=\frac{kd-d'}{kd}\varepsilon_c,\quad \varepsilon_s=\frac{d-kd}{kd}\varepsilon_c$$

従って、f_s'とf_sは次のようにε_cで表せる。

$$f_s'=E_s\varepsilon_s'=E_s\frac{kd-d'}{kd}\varepsilon_c=\frac{kd-d'}{kd}E_s\frac{f_c}{E_c}=\frac{kd-d'}{kd}nf_c \qquad \text{(b)}$$

$$f_s=E_s\varepsilon_s=E_s\frac{d-kd}{kd}\varepsilon_c=\frac{d-kd}{kd}E_s\frac{f_c}{E_c}=\frac{1-k}{k}nf_c \qquad \text{(c)}$$

ここに、弾性係数比$n=E_s/E_c$ (d)

補足資料: $k=\sqrt{(\rho'+\rho)^2n^2+2(\rho'd'/d+\rho)n}-(\rho'+\rho)n$ の誘導(2)

圧縮コンクリートの合力は、圧縮鉄筋で除外される微小面積を無視すると圧縮応力の直線分布仮定より$0.5f_c bkd$となる。従って、軸方向力の釣合い式は以下のように書ける。

$C_c+C_s=T$ または $0.5f_c bkd+f_s'A_s'=f_sA_s$ (e)

式(b)と(c)を式(e)に代入すると、

$$0.5f_c bkd+\frac{kd-d'}{kd}nf_cA_s'=\frac{1-k}{k}nf_cA_s$$

$$\therefore\ bd^2k^2+2(kd-d')nA_s'-2(1-k)dnA_s=0$$

$$k^2+2(A_s'+A_s)nk/bd-2(A_s'd'/d+A_s)n/bd=0$$

$$k^2+2(\rho'+\rho)nk-2(\rho'd'/d+\rho)n=0$$

ここに、$\rho'=A_s'/bd$ $\rho=A_s/bd$

上記の2次方程式の解は以下となる。

$$k=-(\rho'+\rho)n+\sqrt{(\rho'+\rho)^2n^2+2(\rho'd'/d+\rho)n}$$

※圧縮最外縁コンクリートの応力が$0.7f_c'$よりも大きくなる場合には、鉄筋降伏時中立軸深さは実際の応力ーひずみ関係(放物線近似がよい)を用いて計算するのが望ましい。

終局時のモーメントと曲率（1）
ー圧縮鉄筋が降伏する場合

■圧縮鉄筋が降伏する場合を想定

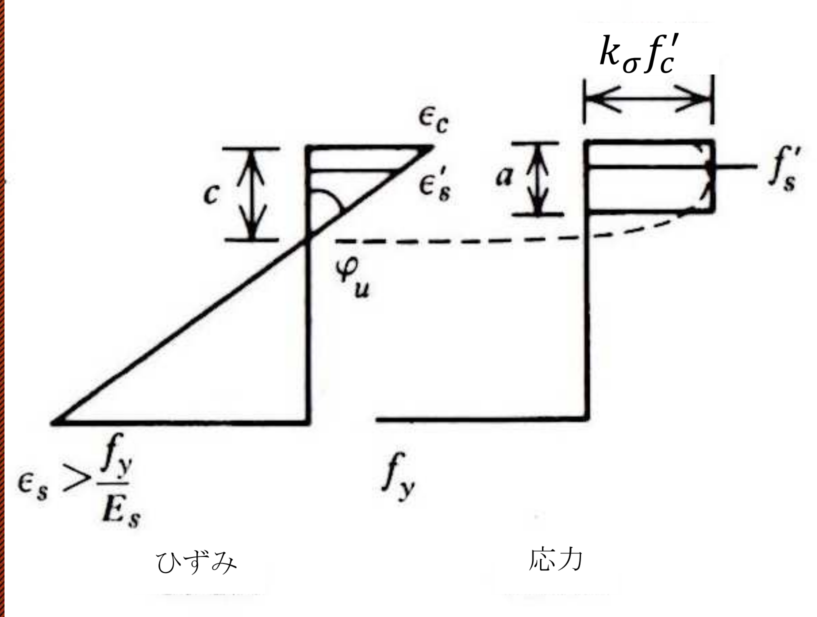
$a = \frac{(A_s - A'_s)f_y}{0.85 f'_c b}$ （$k_\sigma = 0.85$を仮定）

■終局時モーメント

$$M_u = 0.85 f'_c ab\left(d - \frac{a}{2}\right) + A'_s f_y (d - d')$$

■終局曲率

$$\varphi_u = \frac{\varepsilon_c}{c} = \frac{\beta_1 \varepsilon_c}{a}$$



(b)終局時

終局時のモーメントと曲率(2)

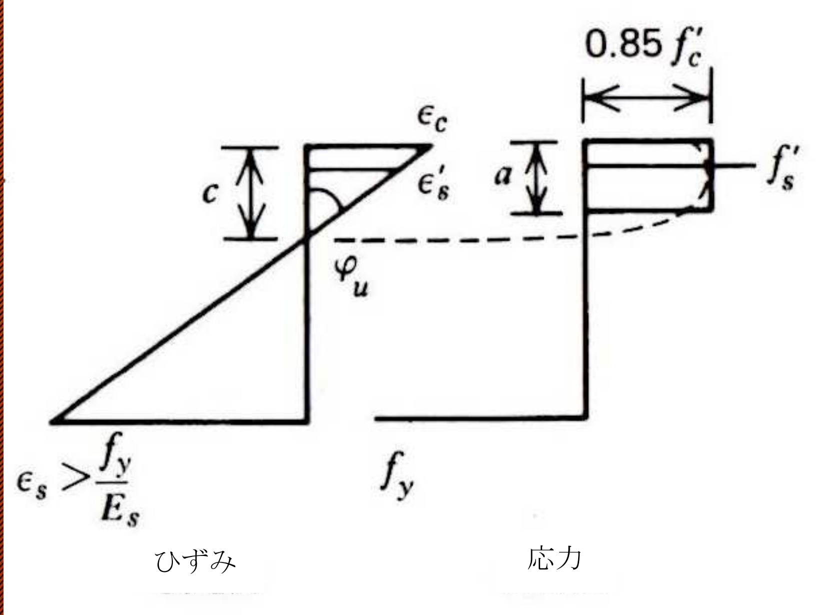
■圧縮鉄筋のひずみ

$$\varepsilon_s' = \varepsilon_c\left(\frac{c-d'}{c}\right) = \varepsilon_c\left(1-\frac{\beta_1 d'}{a}\right)$$

$a = \dfrac{(A_s - A_s')f_y}{0.85 f_c' b}$ を代入して、

$$\varepsilon_s' = \varepsilon_c\left[1-\beta_1 d'\left(\frac{0.85 f_c' b}{(A_s-A_s')f_y}\right)\right]$$

■$\varepsilon_s' \geq \dfrac{f_y}{E_s}$ の時、計算は正しい



(b)終局時

終局時のモーメントと曲率(3)
ー圧縮鉄筋が降伏しない場合

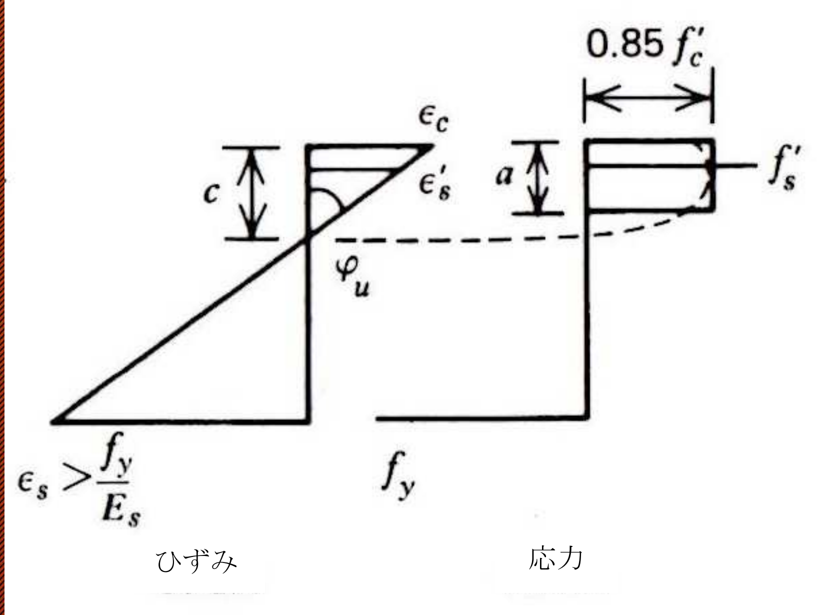
- $\varepsilon'_s < \dfrac{f_y}{E_s}$の時、圧縮鉄筋は弾性状態
- 再計算

$$f'_s = \varepsilon'_s E_s = \varepsilon_c \frac{a-\beta_1 d'}{a} E_s$$

合力の釣合い: $0.85 f'_c ab = A_s f_y - A'_s f'_s$

- 上記を連立にしてaに関する2次方程式

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{d}\right)^2 + \frac{a}{d}\left(\frac{\rho'\varepsilon_c E_s - \rho f_y}{1.7 f'_c}\right) - \frac{\rho'\varepsilon_c E_s \beta_1 d'}{1.7 f'_c d} = 0$$



(b)終局時

終局時のモーメントと曲率(4)
ー圧縮鉄筋が降伏しない場合

■2次方程式の解

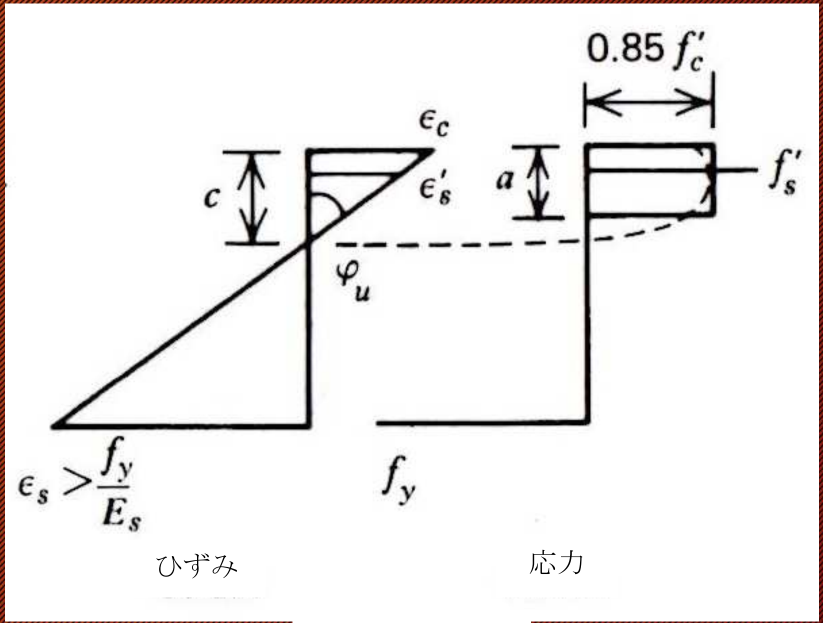
$$\frac{a}{d}=-\left(\frac{\rho'\varepsilon_c E_s-\rho f_y}{1.7f_c'}\right)+\sqrt{\left(\frac{\rho'\varepsilon_c E_s-\rho f_y}{1.7f_c'}\right)^2+\frac{\rho'\varepsilon_c E_s\beta_1 d'}{0.85f_c' d}}$$

■終局時モーメント

$$M_u=0.85f_c' ab\left(d-\frac{a}{2}\right)+A_s' E_s\varepsilon_c\frac{a-\beta_1 d'}{a}(d-d')$$

■終局曲率

$$\varphi_u=\frac{\varepsilon_c}{c}=\frac{\beta_1\varepsilon_c}{a}$$



(b)終局時

補足資料: $\frac{a}{d} = -\left(\frac{\rho'\varepsilon_c E_s - \rho f_y}{1.7f_c'}\right) + \sqrt{\left(\frac{\rho'\varepsilon_c E_s - \rho f_y}{1.7f_c'}\right)^2 + \frac{\rho'\varepsilon_c E_s \beta_1 d'}{0.85f_c' d}}$の誘導（1）

$$a = \frac{A_s f_y - A_s' f_s'}{0.85 f_c' b} \qquad \text{(a)}$$

$$f_s' = \varepsilon_s' E_s = \varepsilon_c \frac{a - \beta_1 d'}{a} E_s \qquad \text{(b)}$$

$$M_u = 0.85 f_c' ab\left(d - \frac{a}{2}\right) + A_s' f_s'(d - d') \qquad \text{(c)}$$

式(a)を(b)に代入する。

$$0.85 f_c' ba = A_s f_y - A_s' \varepsilon_c \frac{a - \beta_1 d'}{a} E_s$$

$$0.85 f_c' ba^2 = A_s f_y a - \varepsilon_c A_s' E_s (a - \beta_1 d')$$

$$0.85 f_c' ba^2 + \left(\varepsilon_c A_s' E_s - A_s f_y\right) a - \varepsilon_c A_s' E_s \beta_1 d' = 0$$

補足資料：$\frac{a}{d}=-\left(\frac{\rho'\varepsilon_c E_s-\rho f_y}{1.7f_c'}\right)+\sqrt{\left(\frac{\rho'\varepsilon_c E_s-\rho f_y}{1.7f_c'}\right)^2+\frac{\rho'\varepsilon_c E_s\beta_1 d'}{0.85f_c' d}}$の誘導（2）

$$a^2+\left(\frac{\varepsilon_c A_s' E_s-A_s f_y}{0.85f_c' b}\right)a-\frac{\varepsilon_c A_s' E_s\beta_1 d'}{0.85f_c' b}=0$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{d}\right)^2+\left(\frac{\varepsilon_c A_s' E_s-A_s f_y}{1.7f_c' bd}\right)\frac{a}{d}-\frac{\varepsilon_c A_s' E_s\beta_1 d'}{1.7f_c' bd^2}=0$$

$\rho'=A_s'/bd,\ \rho=A_s/bd$を考慮して、

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{d}\right)^2+\left(\frac{\rho'\varepsilon_c E_s-\rho f_y}{1.7f_c'}\right)\frac{a}{d}-\frac{\rho'\varepsilon_c E_s\beta_1 d'}{1.7f_c' d}=0$$

$$\therefore\ \frac{a}{d}=-\left(\frac{\rho'\varepsilon_c E_s-\rho f_y}{1.7f_c'}\right)+\sqrt{\left(\frac{\rho'\varepsilon_c E_s-\rho f_y}{1.7f_c'}\right)^2+\frac{\rho'\varepsilon_c E_s\beta_1 d'}{0.85f_c' d}}$$

降伏曲率と終局曲率

■降伏曲率の比

$$\varphi_y = \frac{f_y/E_s}{d(1-k)}$$

■終局曲率

$$\varphi_u = \frac{\varepsilon_c}{c} = \frac{\beta_1 \varepsilon_c}{a}$$

■終局曲率の降伏曲率に対する比＝曲率靭性率

$$\frac{\varphi_u}{\varphi_y} = \frac{\beta_1 \varepsilon_c}{a} \frac{d(1-k)}{f_y/E_s} = \frac{\varepsilon_c}{f_y/E_s} \frac{d(1-k)}{a/\beta_1}$$

曲率靭性率(1)圧縮鉄筋が降伏する場合

■ $\dfrac{\varphi_u}{\varphi_y} = \dfrac{\beta_1 \varepsilon_c}{a} \dfrac{d(1-k)}{f_y/E_s} = \dfrac{\varepsilon_c}{f_y/E_s} \dfrac{d(1-k)}{a/\beta_1}$

中立軸深さ: $k = \sqrt{(\rho' + \rho)^2 n^2 + 2(\rho' d'/d + \rho)n} - (\rho' + \rho)n$

等価応力ブロック深さ: $a = \dfrac{(A_s - A_s')f_y}{0.85 f_c' b}$

$$\frac{\varphi_u}{\varphi_y} = \frac{\varepsilon_c}{f_y/E_s} \frac{d\left\{1 - \left[\sqrt{(\rho' + \rho)^2 n^2 + 2(\rho' d'/d + \rho)n} - (\rho' + \rho)n\right]\right\}}{\left[\dfrac{(A_s - A_s')f_y}{0.85 f_c' b}\right]/\beta_1}$$

$$= \frac{0.85\beta_1 E_s \varepsilon_c f_c'}{{f_y}^2} \frac{\left\{1 + (\rho' + \rho)n - \sqrt{(\rho' + \rho)^2 n^2 + 2(\rho' d'/d + \rho)n}\right\}}{(A_s - A_s')/bd}$$

$$= \frac{0.85\beta_1 E_s \varepsilon_c f_c'}{{f_y}^2(\rho - \rho')} \left\{1 + (\rho' + \rho)n - \sqrt{(\rho' + \rho)^2 n^2 + 2(\rho' d'/d + \rho)n}\right\}$$

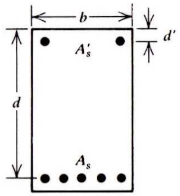
曲率靭性率(2)圧縮鉄筋が降伏しない場合

$$\begin{cases} \text{中立軸深さ}: k = \sqrt{(\rho' + \rho)^2 n^2 + 2(\rho' d'/d + \rho)n} - (\rho' + \rho)n \\ \text{等価応力ブロック深さ}: \frac{a}{d} = -\left(\frac{\rho' \varepsilon_c E_s - \rho f_y}{1.7 f_c'}\right) + \sqrt{\left(\frac{\rho' \varepsilon_c E_s - \rho f_y}{1.7 f_c'}\right)^2 + \frac{\rho' \varepsilon_c E_s \beta_1 d'}{0.85 f_c' d}} \end{cases}$$

$$\frac{\varphi_u}{\varphi_y} = \frac{\beta_1 \varepsilon_c}{a} \frac{d(1-k)}{f_y/E_s} = \frac{\beta_1 E_s \varepsilon_c}{f_y} \frac{(1-k)}{a/d}$$

$$= \frac{\beta_1 E_s \varepsilon_c}{f_y} \frac{\left\{1 + (\rho' + \rho)n - \sqrt{(\rho' + \rho)^2 n^2 + 2(\rho' d'/d + \rho)n}\right\}}{-\left(\frac{\rho' \varepsilon_c E_s - \rho f_y}{1.7 f_c'}\right) + \sqrt{\left(\frac{\rho' \varepsilon_c E_s - \rho f_y}{1.7 f_c'}\right)^2 + \frac{\rho' \varepsilon_c E_s \beta_1 d'}{0.85 f_c' d}}}$$

曲率靭性率の計算例



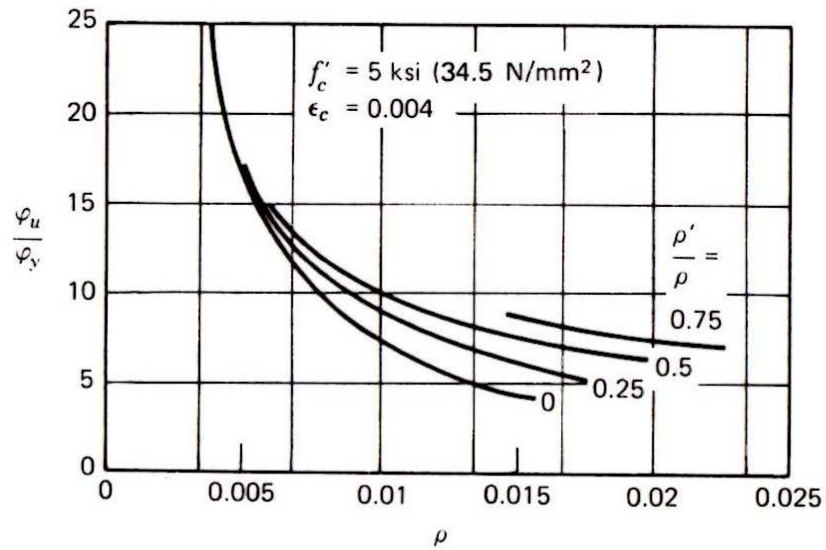
$\rho = \frac{A_s}{bd}$

$\rho' = \frac{A'_s}{bd}$

$\frac{d'}{d} = 0.1$

f_y = 60 ksi (414 N/mm^2)

E_s = 29 × 10^3 ksi (200,000 N/mm^2)



※終局時に上鉄筋が引張降伏する場合はプロットしていない－曲線が上昇していく左端の点

1.引張鉄筋量が増加すると靭性は減少する

kおよびaが増加し、その結果φ_yは増加、φ_uが減少するため（$\varphi_y = \frac{f_y/E_s}{d(1-k)}$、$\varphi_u = \frac{\varepsilon_c}{c} = \frac{\beta_1 \varepsilon_c}{a}$）

2.圧縮鉄筋量が増加すると靭性は増加する

kおよびaが減少し、その結果φ_yは減少、φ_uが増加するため（$\varphi_y = \frac{f_y/E_s}{d(1-k)}$、$\varphi_u = \frac{\varepsilon_c}{c} = \frac{\beta_1 \varepsilon_c}{a}$）

3.鉄筋降伏強度が増加すると靭性は減少する

φ_yが増加、φ_uが減少するため（$\varphi_y = \frac{f_y/E_s}{d(1-k)}$、$a$が増加）

$M-\varphi$関係を求める練習問題

複鉄筋長方形断面

■引張鉄筋配置：4@No.8(径1in)

■圧縮鉄筋配置：2@No.8

■コンクリート

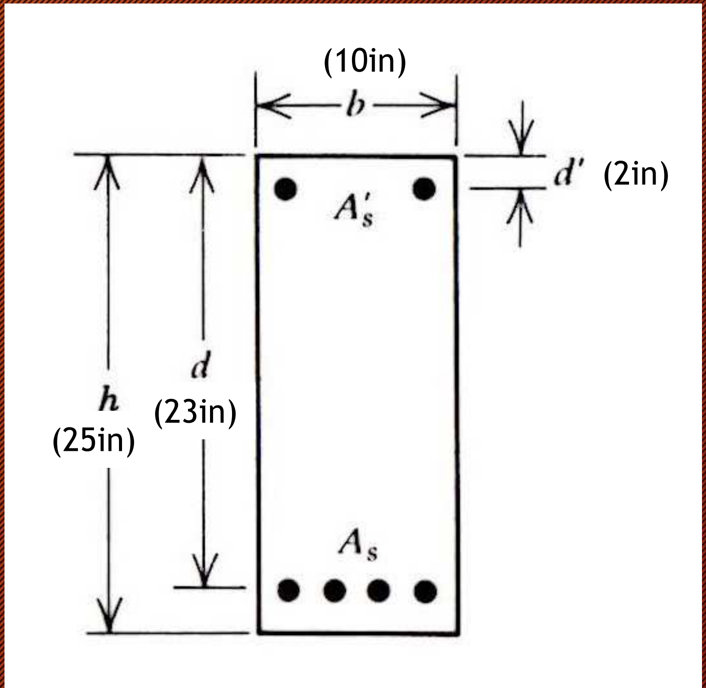
f_c'=3000psi(20.7N/mm^2)
f_r=410psi(2.83N/mm^2)

E_c=3.2×10^{6}psi(22,070 N/mm^2)

■鉄筋

f_y=40,000 psi(276N/mm^2)、

E_s=29×10^{6}psi(200,000N/mm^2)



問題

(1)コンクリートひび割れ発生時
(2)引張鉄筋降伏時、および
(3)コンクリート圧縮最外縁ひずみが0.004に達する時
のそれぞれのモーメントと曲率を計算せよ。
そして、トリリニアのモーメントー曲率曲線を作成せよ。

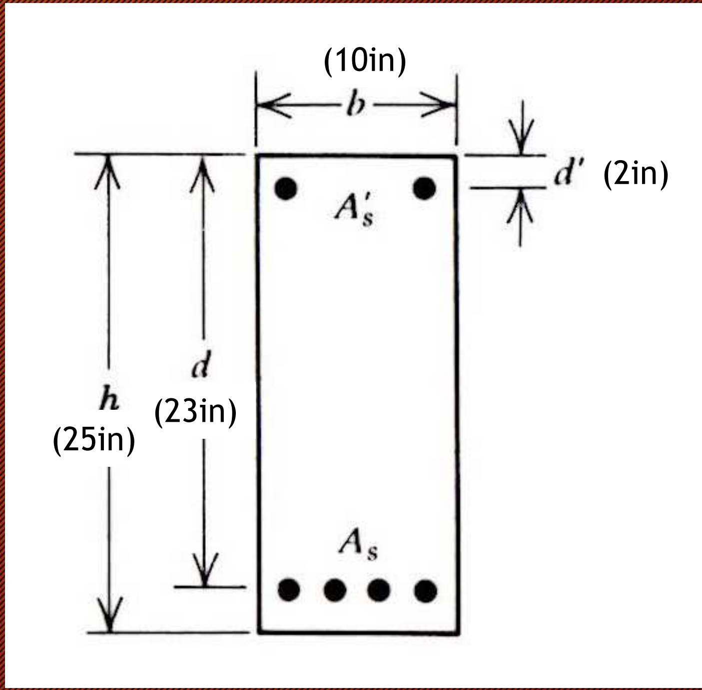
鉄筋諸元

■引張鉄筋

$A_s = 3.16in^2(2039mm^2)\ \therefore\ \rho = \frac{3.16}{10\times(25-2)} = 0.01374$

■圧縮鉄筋

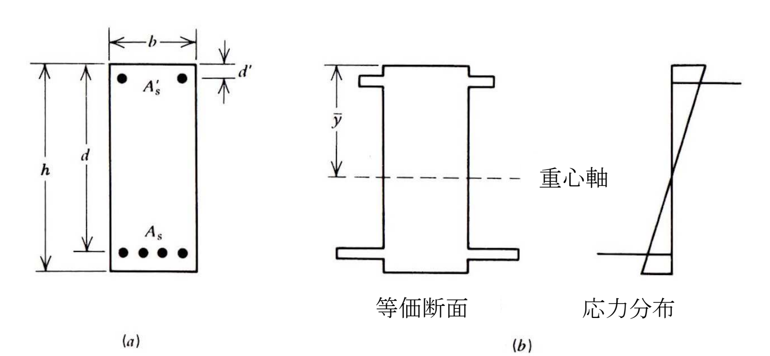
$A_s' = 1.58in^2(1019mm^2)\ \therefore\ \rho' = \frac{1.58}{10\times(25-2)} =$
0.00687



ひび割れ発生時（1）

- 弾性等価断面を用いて計算できる。
- 鉄筋とコンクリートの弾性係数比$n = E_s/E_c$ =29/3.2=9.06
- $A = bh + (n-1)(A_s + A_s') = 10 \times 25 + (9.06-1)(3.16+1.58) = 288.2 in^2$
- 弾性等価断面の重心位置は、上端周りの断面1次モーメントを考慮して

$$\underline{y} = \frac{bh \times h/2 + (n-1)(A_s d + A_s' d')}{A} = \frac{10\times25\times12.5+8.06\times3.16\times23+8.06\times1.58\times2}{288.2} = 12.97 in$$



- 従って、断面2次モーメントは以下となる。

$$\mathrm{I} = \frac{bh^3}{12} + bh \times \left(\underline{y} - \frac{h}{2}\right)^2 + (n-1)\left(A_s d^2 + A_s' d'^2\right)$$

$$= \left(\frac{1}{12} \times 10 \times 25^3\right) + 10 \times 25 \times (12.97 - 12.5)^2$$

$$+3.16 \times 8.06 \times (23 - 12.97)^2 + 1.58 \times 8.06 \times (12.97 - 2)^2 = 17{,}170 in^4$$

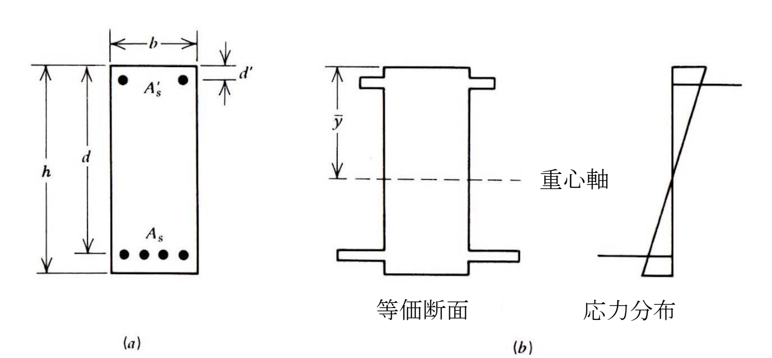
ひび割れ発生時（２）

- 最下縁の応力が割裂強度$f_r = 410\text{psi}$に達するとき、ひび割れが生じる。

$$M_{crack} = \frac{f_r I}{y_{bottom}} = \frac{410 \times 17{,}170}{25 - 12.97} = 585{,}200 lb \cdot in (66.1 kN \cdot m)$$

$$\varphi_{crack} = \frac{f_r / E_c}{y_{bottom}} = \frac{410/(3.2 \times 10^6)}{25 - 12.97}$$

$$= 1.07 \times 10^{-5} rad/in (0.419 \times 10^{-3} rad/m)$$



初降伏時(1)

圧縮コンクリートは弾性挙動すると仮定すると、中立軸位置は以下の式で求められる。

$$k=\sqrt{(\rho'+\rho)^2n^2+2(\rho'd'/d+\rho)n}-(\rho'+\rho)n$$

$$=\sqrt{(0.00687+0.01374)^2\times 9.06^2+2(0.00687\times 2/23+0.01374)\times 9.06}$$
$$-(0.00687+0.01374)\times 9.06=0.356$$

$$\therefore\ \ kd=0.356\times 23=8.19in(208\text{mm})$$

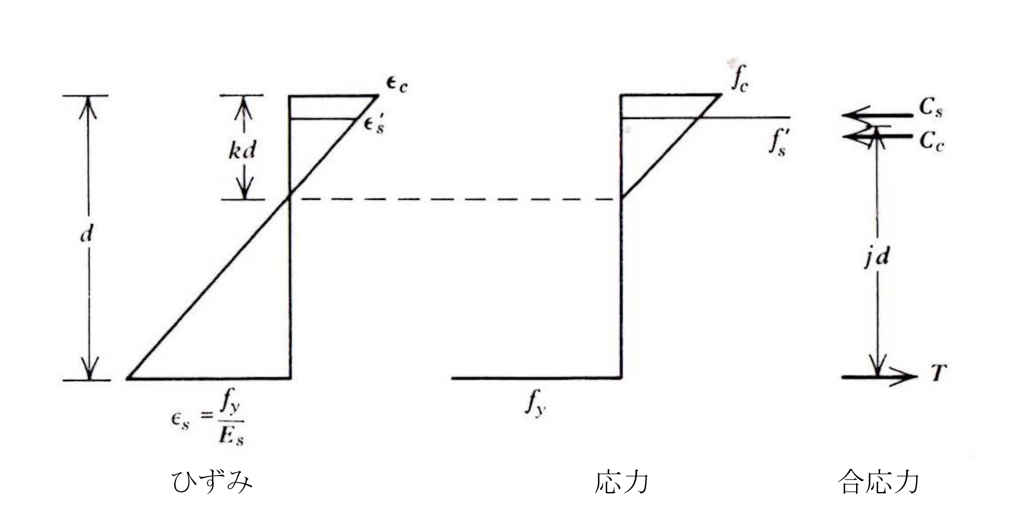
今、$\varepsilon_s=\varepsilon_y=40{,}000/(29\times 10^6)$ =0.00138

ひずみ分布図より、

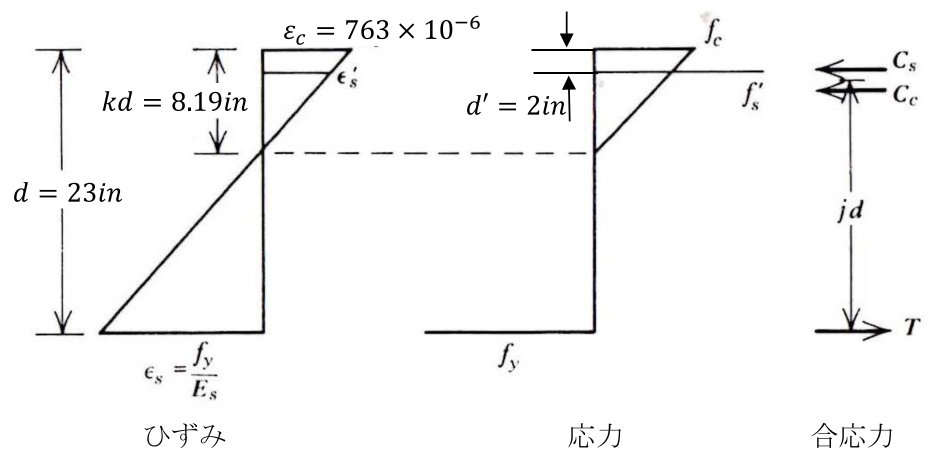
$$\varepsilon_c=0.00138\frac{8.19}{23-8.19}=0.000763$$

$$\therefore\ \ f_c=0.000763\times 3.2\times 10^6=2440psi=0.81f$$

従って、近似的には3角形応力分布となる。



初降伏時（２）



■圧縮力：ひずみ分布図より

$$\varepsilon_s' = 0.000763 \times \frac{8.19 - 2}{8.19} = 0.000577$$

$$\therefore \quad f_s' = 0.000577 \times 29 \times 10^6 = 16{,}730psi$$

$$C_c = \frac{1}{2} f_c bkd = 0.5 \times 2440 \times 10 \times 8.19 = 99{,}920lb$$

$$C_s = A_s' f_s' = 1.58 \times 16{,}730 = 26{,}430lb$$

■全圧縮力と作用位置

$$C_c + C_s = 99{,}920 + 26{,}430 = 126{,}350lb$$

作用位置を上縁よりyとすると、

$$y = \frac{C_s d' + C_c kd/3}{C_c + C_s} = \frac{26{,}430 \times 2 + 99{,}920 \times 8.19 \times 1/3}{126{,}350} = 2.58in(65.5mm)$$

- $\therefore \quad jd = 23 - 2.58 = 20.42in\ (518.7mm)$

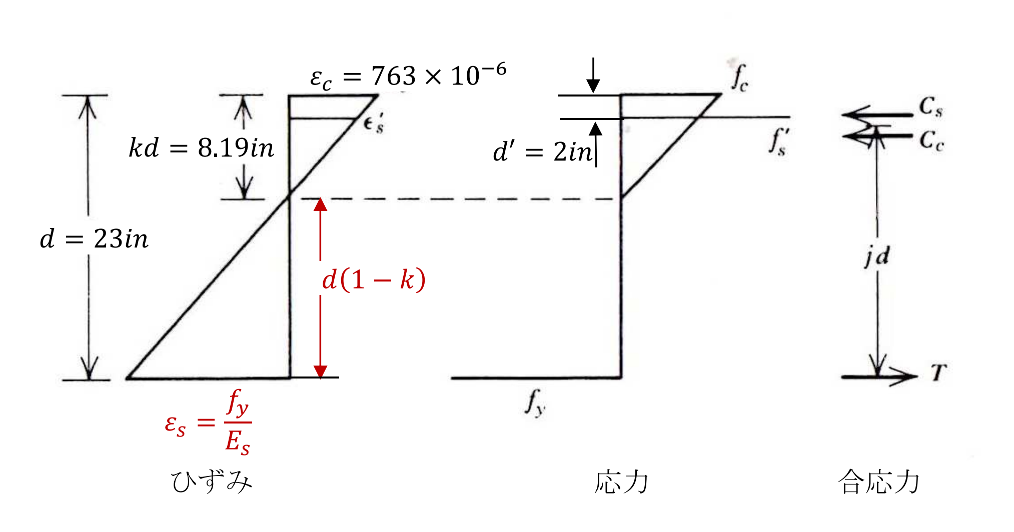
初降伏時(3)

■降伏モーメント

$$M_y = A_s f_y jd = 3.16 \times 40{,}000 \times 20.42$$
$$= 2.58 \times 10^6 lb \cdot in(291kN \cdot m)$$

■降伏曲率

$$\varphi_y = \frac{f_y/E_s}{d(1-k)} = \frac{40{,}000/(29\times10^6)}{23\times(1-0.356)}$$
$$= 9.32 \times 10^{-5} rad/in(3.67 \times 10^{-3} rad/m)$$



終局時（1）

圧縮鉄筋も降伏すると仮定すると、

$$a=\frac{(A_s-A_s')f_y}{0.85f_c'b}$$

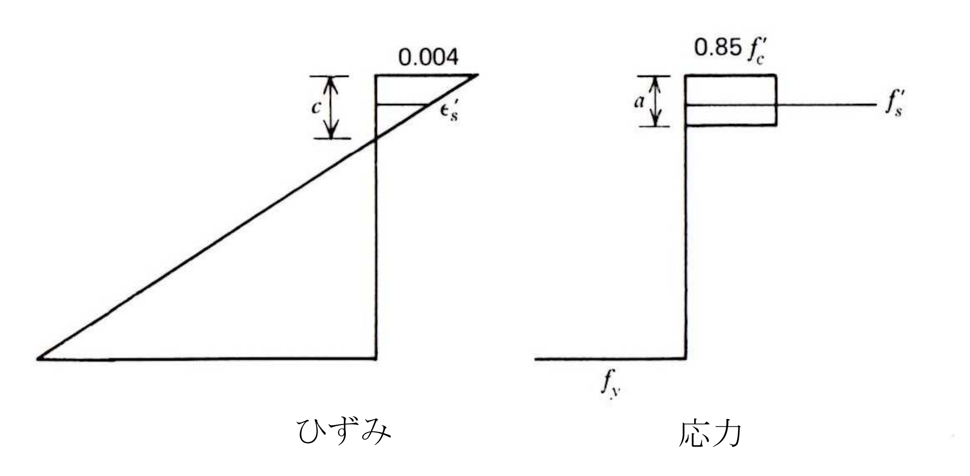
$$=\frac{(3.16-1.58)\times 40{,}000}{0.85\times 3000\times 10}=2.48in$$

$$\therefore\ \ c=\frac{a}{\beta_1}=\frac{2.48}{0.85}=2.92in(74.2mm)$$

ひずみ分布より、

$$\varepsilon_s'=0.004\times\frac{2.92-2}{2.92}=0.00126$$

$f_y/E_s=0.00138$なので圧縮鉄筋は降伏しない。



終局時（2）

■2次方程式

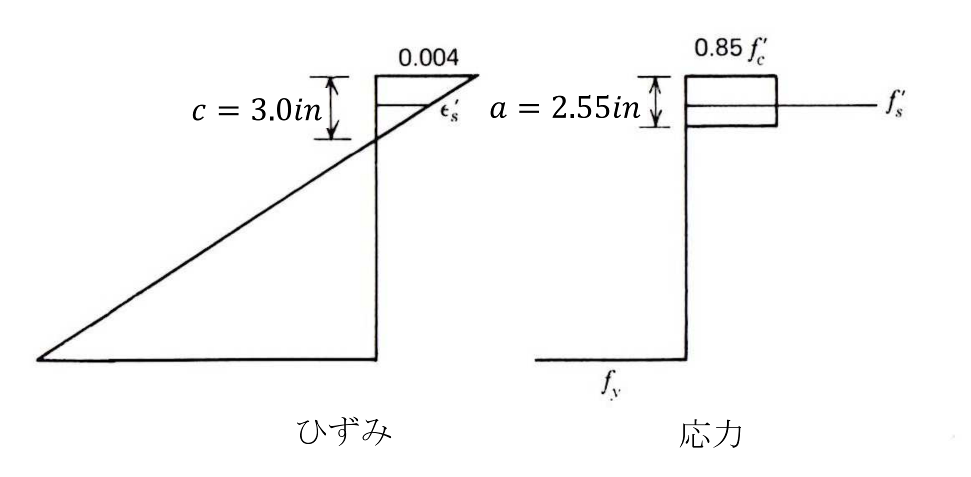
$$\frac{a}{d}=-\left(\frac{\rho'\varepsilon_c E_s-\rho f_y}{1.7f_c'}\right)+\sqrt{\left(\frac{\rho'\varepsilon_c E_s-\rho f_y}{1.7f_c'}\right)^2+\frac{\rho'\varepsilon_c E_s \beta_1 d'}{0.85f_c' d}}$$

の解は $a = 2.55in$

$\therefore\ c = 2.55/0.85 = 3.0in$

$\varepsilon_s' = 0.004 \times (3.0-2)/3.0 = 0.00133$

$f_s' = 0.00133 \times 29 \times 10^6 = 38{,}600psi$



終局時（3）

■終局時モーメント

$$M_u = 0.85 f_c' ab(d - \frac{a}{2}) + A_s' f_s'(d - d')$$

$$= 0.85 \times 3000 \times 2.55 \times 10 \times (23 - 2.55/2) + 1.58 \times 38{,}600 \times (23 - 2)$$

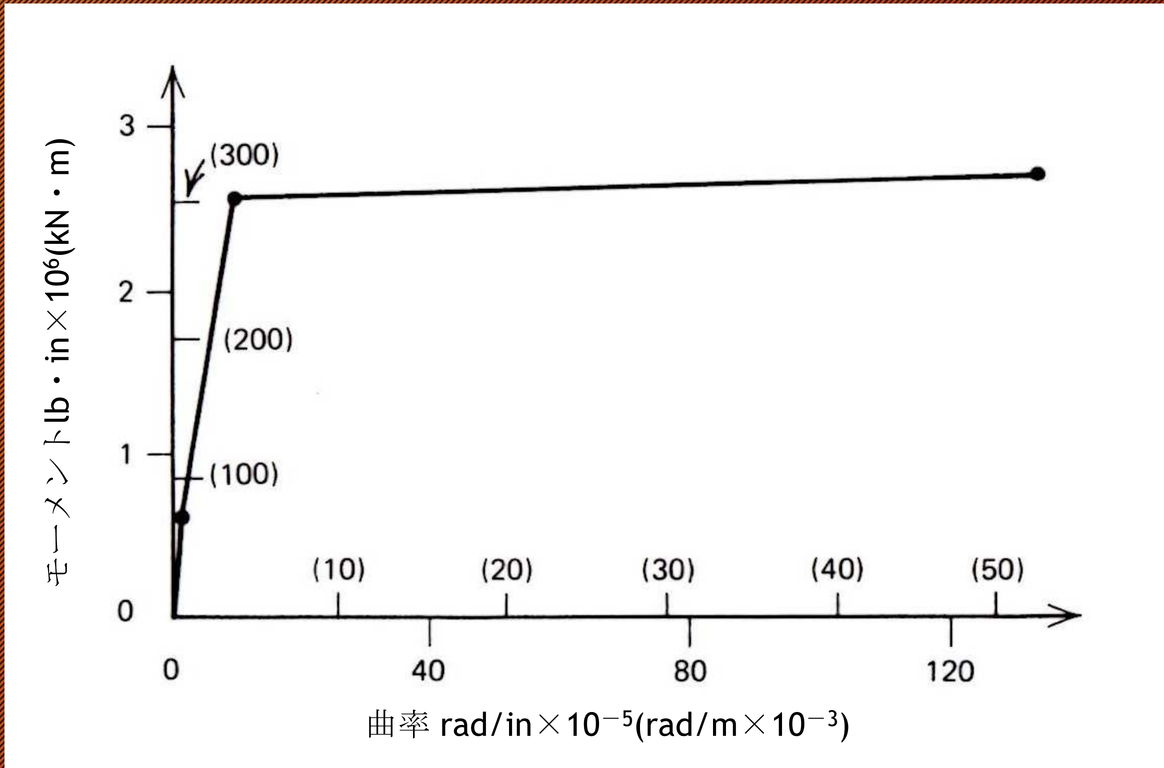
$$= 2.69 \times 10^6 lb \cdot in (304 kN \cdot m)$$

■終局曲率

$$\varphi_u = \frac{\varepsilon_c}{c} = \frac{0.004}{3.00}$$

$$= 133.3 \times 10^{-5} rad/in (52.5 \times 10^{-3} rad/m)$$

得られたモーメント－曲率曲線



横拘束筋のない柱断面の靭性

複鉄筋柱断面に対するP－M相関とP－φ_h：J.A.Blumeらの研究（1）

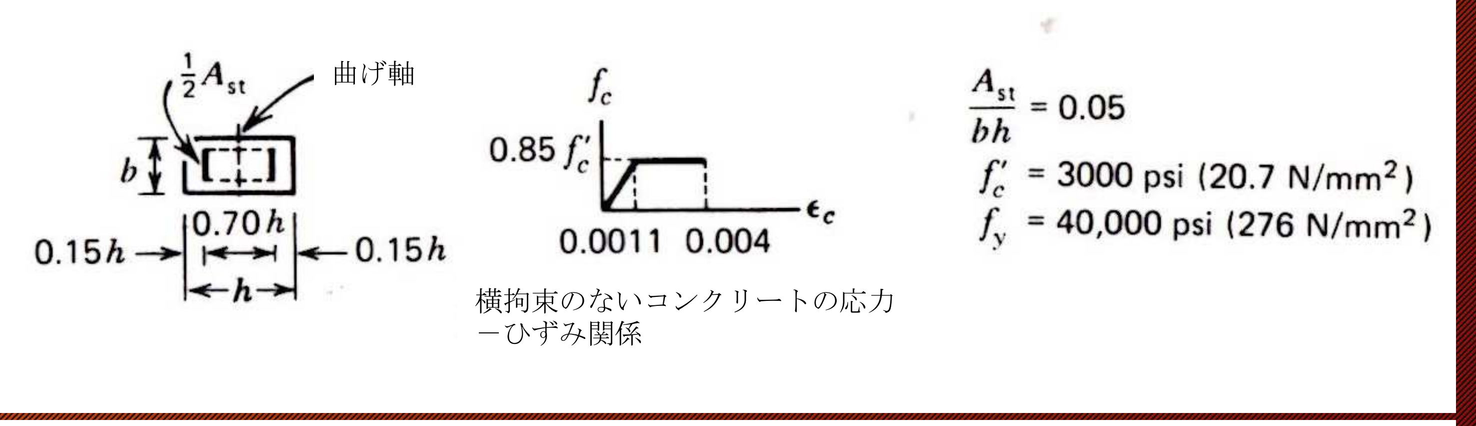
■計算方法の違いは軸方向合力の釣合い：

梁：$k_\sigma f_c' ab + A_s' f_s' - A_s f_y = 0$ ⇒ 柱：$k_\sigma f_c' ab + A_s' f_s' - A_s f_y = P$

■長方形複鉄筋断面

■コンクリート：
バイリニア$-\sigma-\varepsilon$関係

■鉄筋：
$\rho = \rho' = 0.025$



J.A.Blume, N.M.Newmark, and L.H.Corning: Design of Multistory Reinforced Concrete Building for Earthquake Motions, Portland Association, Chicago, 1961, pp.318

複鉄筋柱断面に対するP－M相関とP－φ_h：J.A.Blumeらの研究（2）

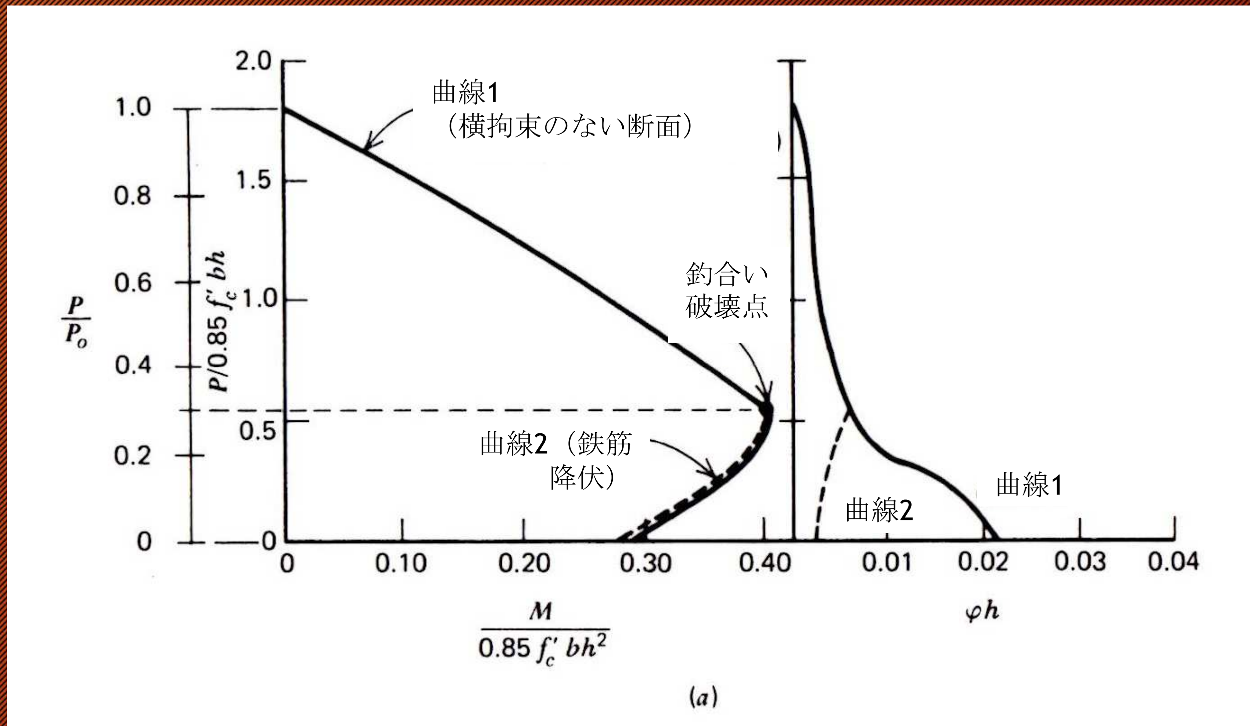
■ P－M相関とP－φ_h曲線

■曲線1（実線）：コンクリート圧縮縁ひずみが0.004に到達した際のPとMの組合せ、および終局曲率

■曲線2（点線）：引張鉄筋降伏時のP、Mおよびφ_hの組合せ

※釣合い点より上では引張鉄筋は降伏しないので曲線2はない

■ P－φ_h図の釣合い点より下では曲線1と2があり、その差は鉄筋降伏後の塑性変形量



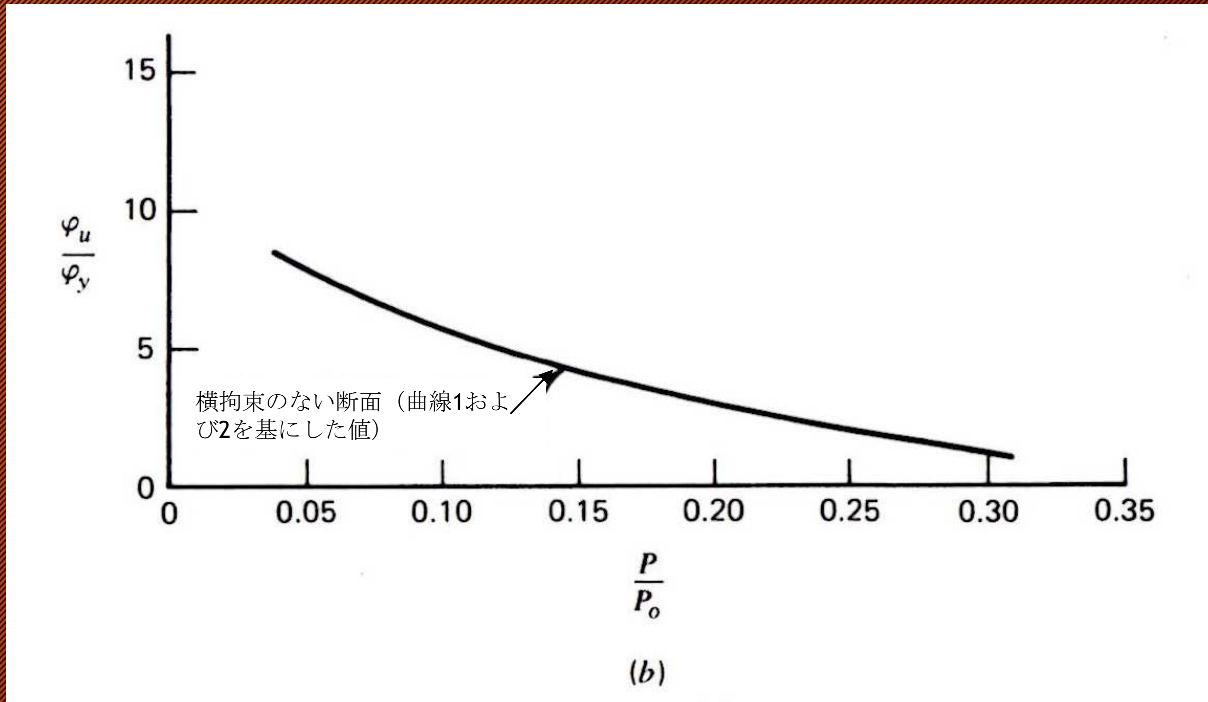
複鉄筋柱断面に対するP－M相関とP－φ_h：J.A.Blumeらの研究（3）

■曲率比（曲率靭性率）φ_u/φ_yを軸力比P/P_0に対してプロット

■P_0：柱の軸圧縮強度

■釣合い点での軸力比：
P/P_0 =0.31

■軸力の増大につれて靭性は大きく低下

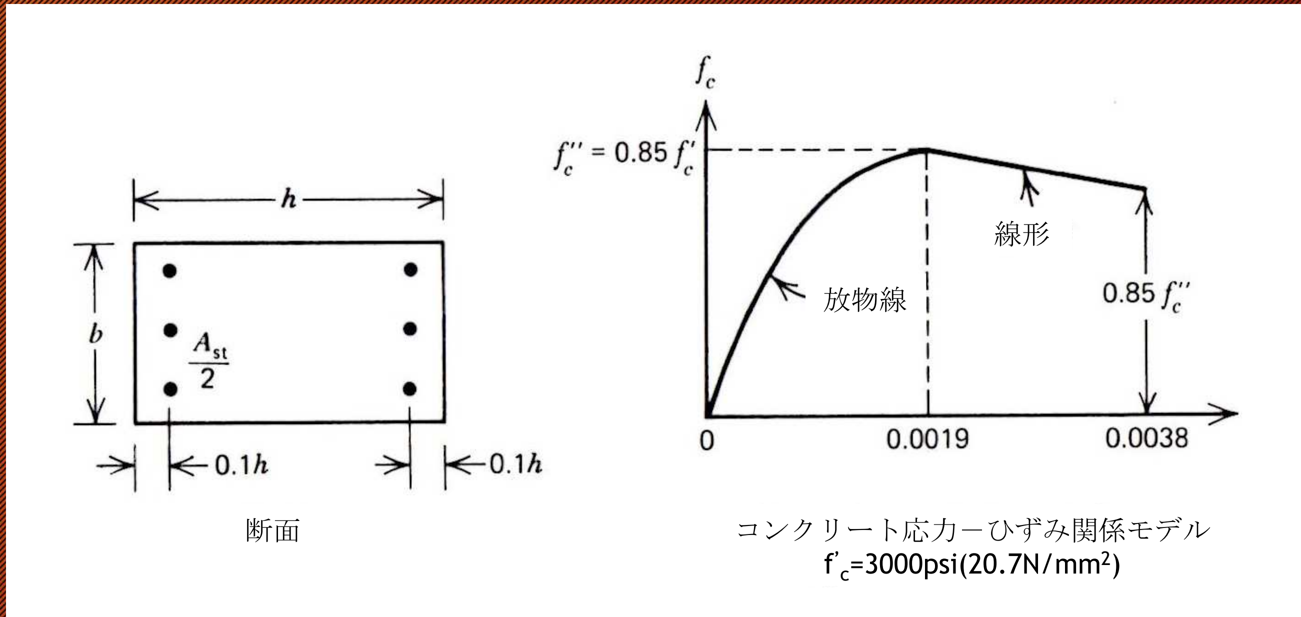


複鉄筋柱断面に対するP－φ_h 関係：Pfrangらの研究（1）

■種々の一定軸力下（柱軸力一定の状態で曲げ破壊させている）での柱断面のモーメント－曲率関係

■鉄筋量：
$\rho = \rho' = 0.005$と0.03

■コンクリートの最大圧縮ひずみ：0.0038

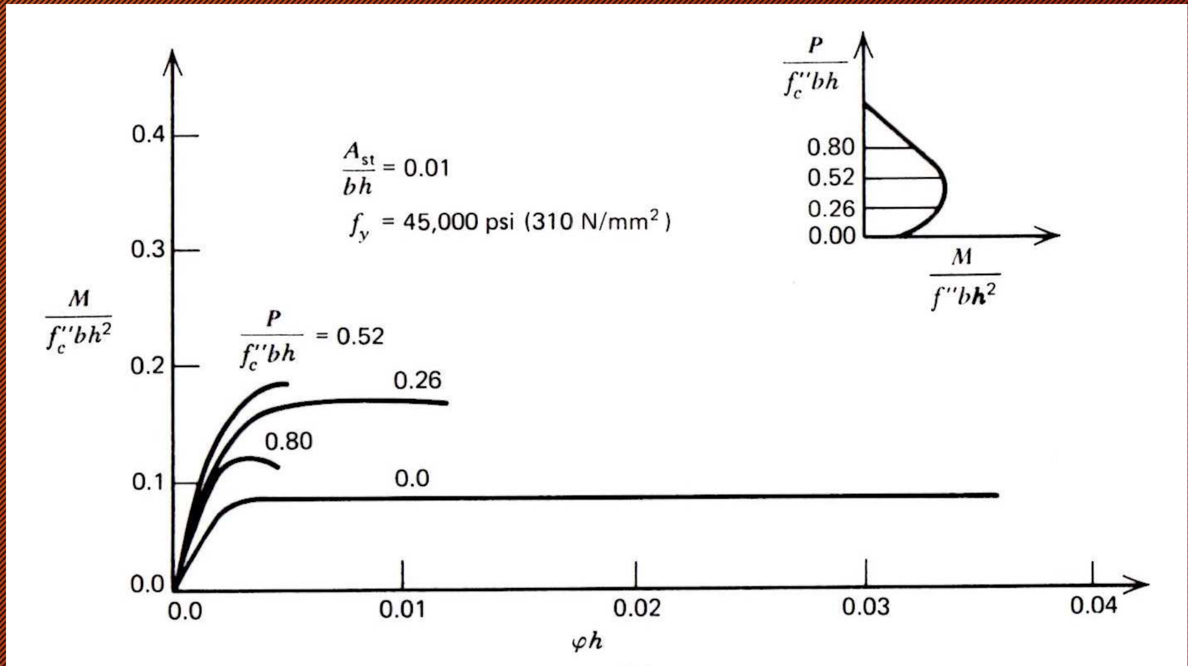


E.O.Pfrang, C.P.Siess and M.S.Sozen: Load Moment-Curvature Characteristics of Reinforced Concrete Sections, Journal ACI, Vol.61, No.7, July 1964, pp.763~778

複鉄筋柱断面に対するP－φ_h 関係：Pfrangらの研究（2）：$\rho = \rho' = 0.005$

■釣合い破壊点軸力より大きい場合：コンクリートの非弾性変形だけであり靱性は殆どない。

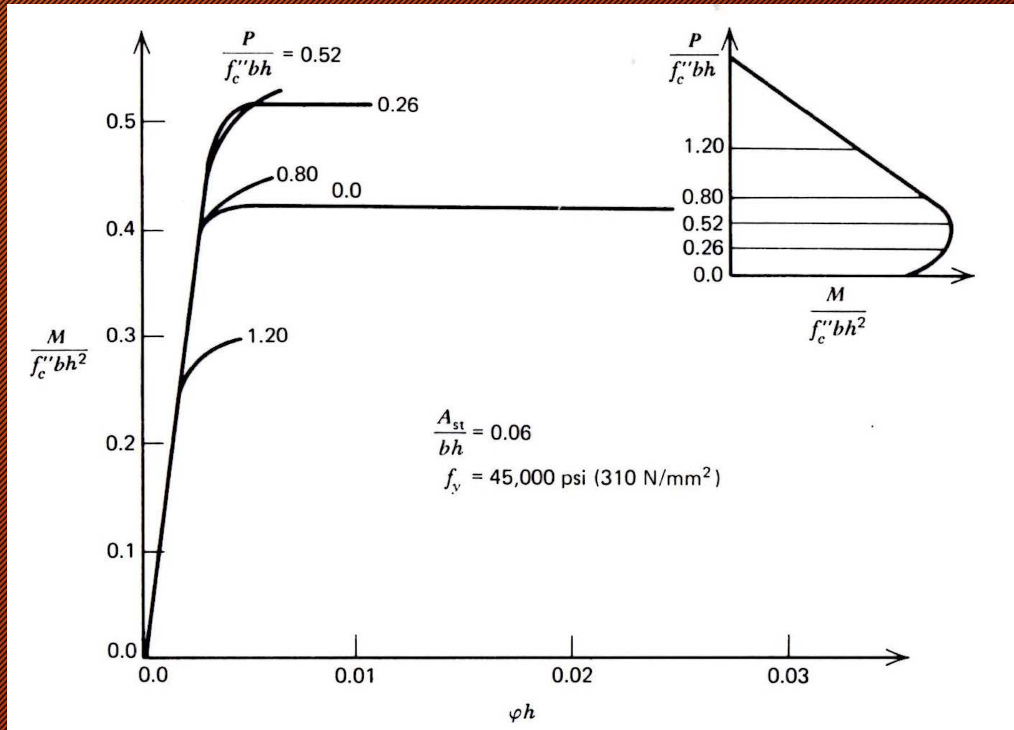
■釣合い破壊点軸力より小さい場合：軸力の低下とともに靱性は増加



複鉄筋柱断面に対するP－φ_h 関係：Pfrangらの研究（3）$\rho = \rho' = 0.03$

■釣合い破壊点軸力より大きい場合：コンクリートの非弾性変形だけであり靭性は殆どない。

■釣合い破壊点軸力より小さい場合：軸力の低下とともに靭性は増加



横拘束筋を有する部材

梁のモーメントー回転特性に及ぼすコンクリートの拘束効果：BaseとReadの梁実験

■試験パラメータ

1）引張鉄筋量：

・釣合い破壊鉄筋量の約半分

・釣合い破壊鉄筋量

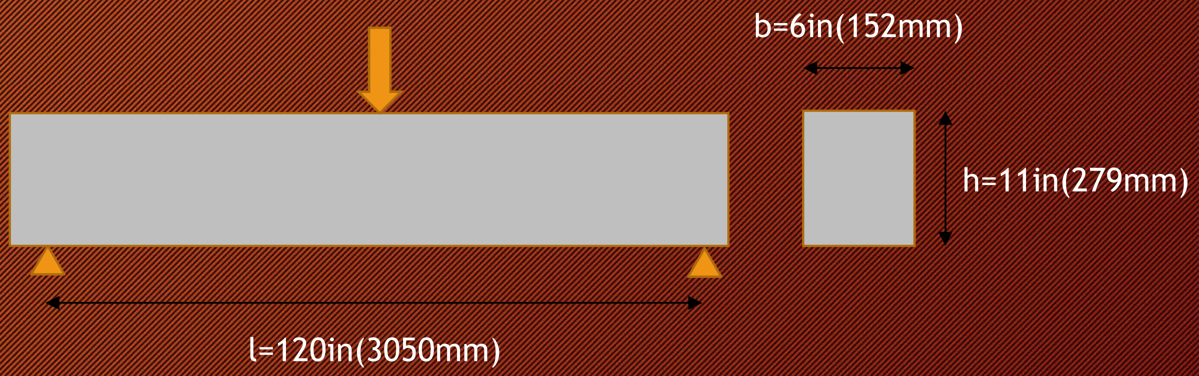
・釣合い破壊鉄筋量以上

2）横拘束筋種類とピッチ

・スターラップ

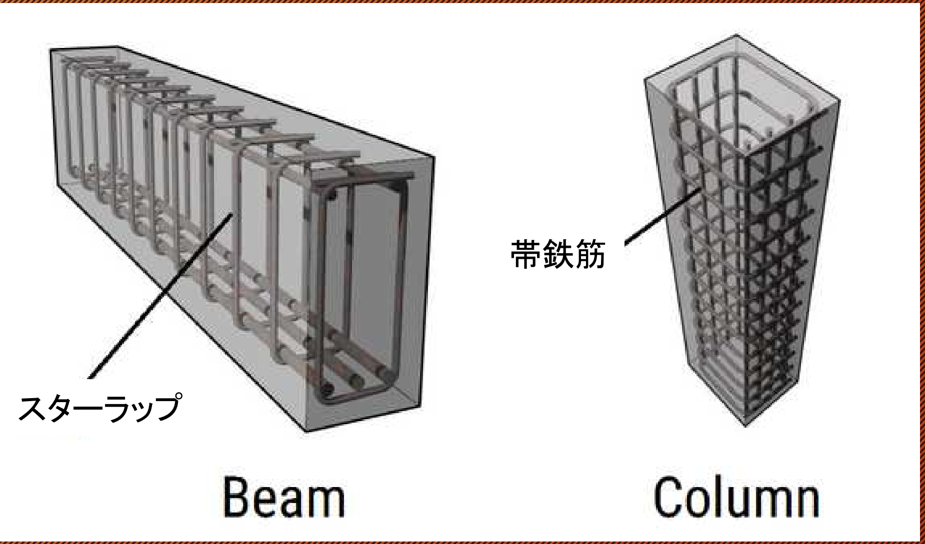
・螺旋筋

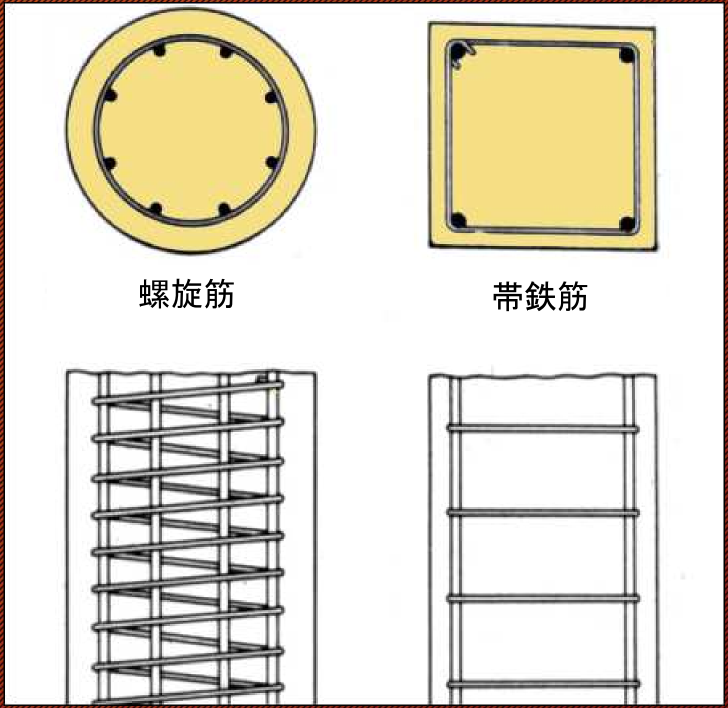
・配置間隔：8in(203mm)、2in(51mm)



G.B.Base and J.B.Read, Effectiveness of Helical Binding in the Compression Zone of Concrete Beams, Journal ACI, Vol.62, No.7, July 1965, pp.763~781

横拘束筋の種類



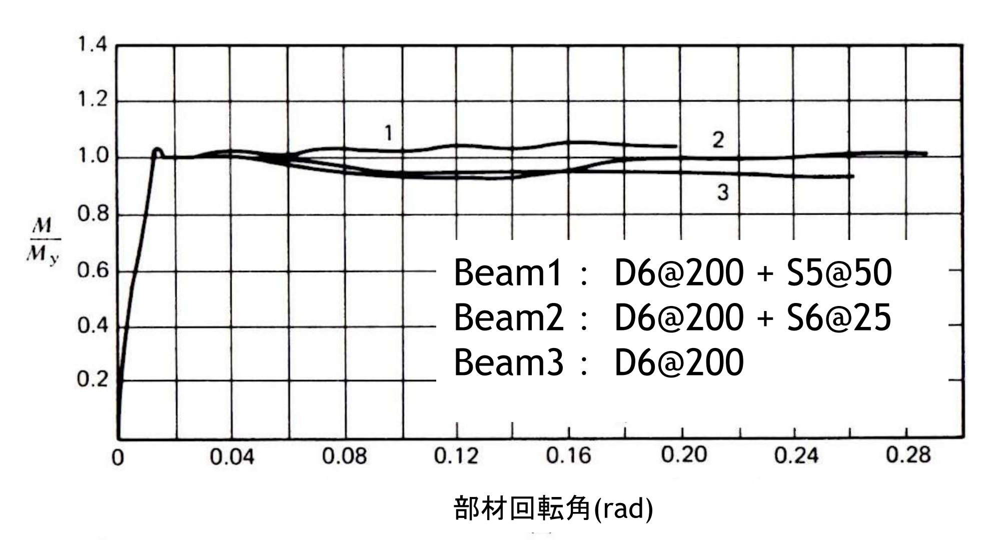


曲げ引張破壊する梁の靭性

■モーメント－回転角曲線

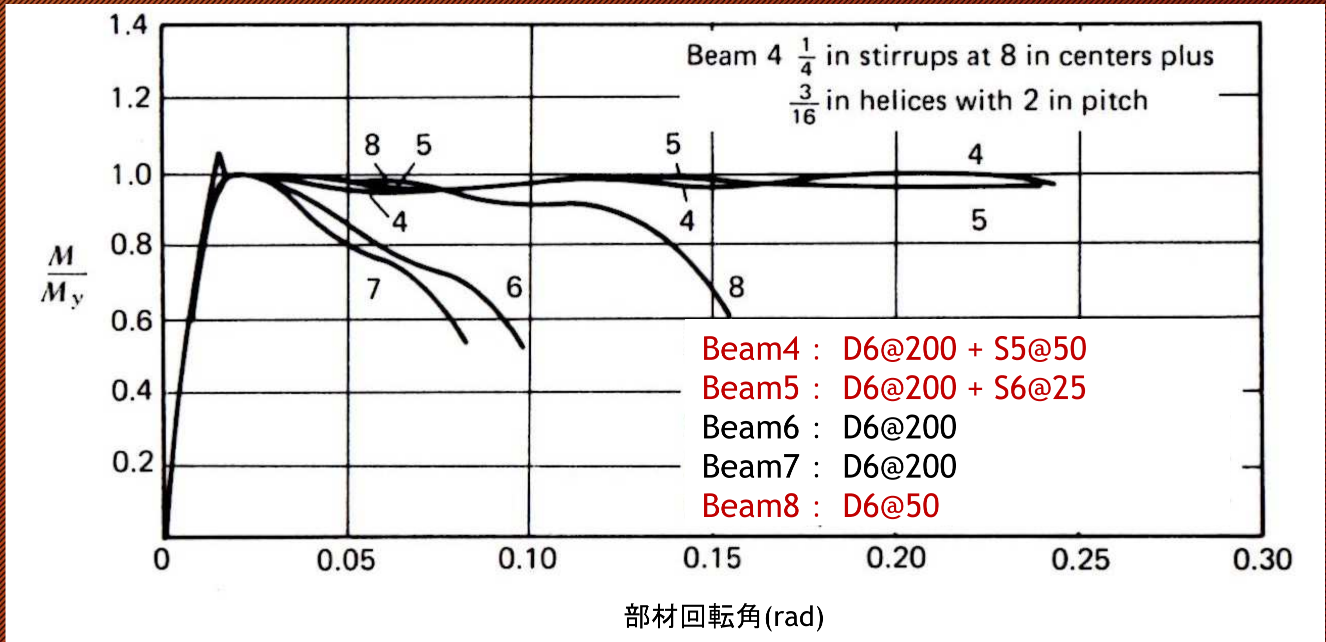
■・釣合い破壊鉄筋量の約半分

■全ての梁とも大幅な低下のないまま大きな回転性能を保有



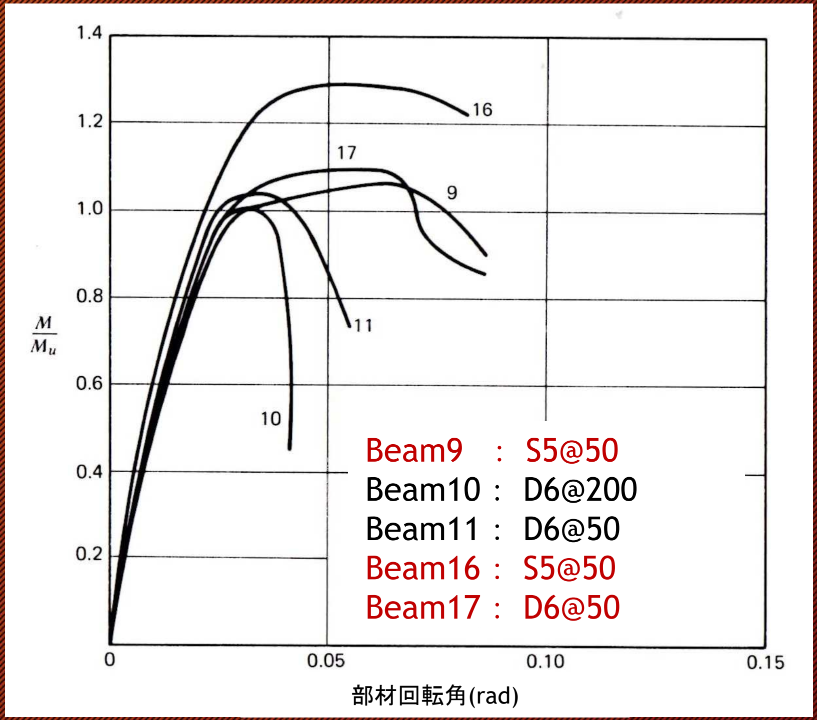
釣合い破壊する梁の靭性

■螺旋筋補強あるいは密に配置されたスターラップ補強が靭性能増加に寄与



曲げ圧縮破壊する梁の靭性

■横拘束筋量により、特に螺旋筋を用いる場合には、靭性能増加のみでなくコンクリートの圧縮強度増加によって曲げ強度増加まで認められる。



横拘束筋を有する部材の$M-\varphi$関係予測方法

横拘束されたコンクリートの応力ーひずみ関係モデル：Kent & Park

■領域AB(ϵ_c≦0.002)：

$$f_c = f_c'\left[\frac{2\epsilon_c}{0.002} - \left(\frac{\epsilon_c}{0.002}\right)^2\right]$$

■領域BC(0.002≦ ϵ_c≦ϵ_{20c})：

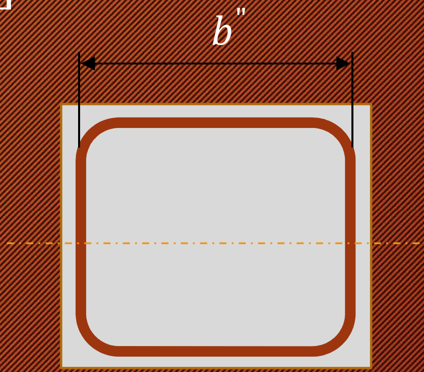
$$f_c = f_c'[1 - Z(\epsilon_c - 0.002)]$$

ここに、

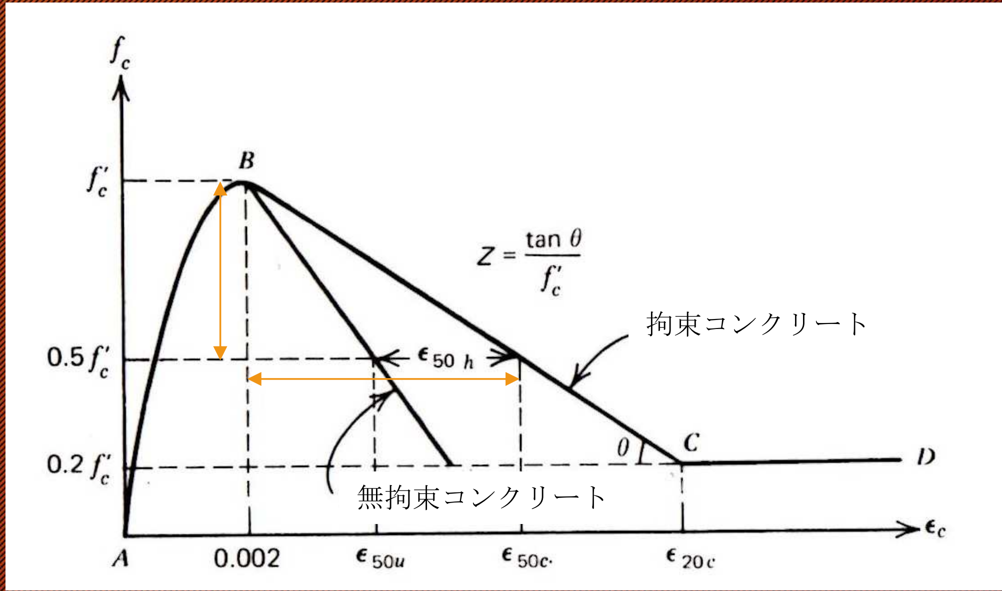
$$Z = \frac{0.5}{\varepsilon_{50u} + \epsilon_{50h} - 0.002}$$

$$\varepsilon_{50u} = \frac{3 + 0.002 f_c'}{f_c' - 1000}$$

$$\varepsilon_{50h} = \frac{3}{4}\rho_s\sqrt{\frac{b''}{s_h}}$$



ρ_s：帯筋体積の帯筋外面までのコアコンクリート体積に対する比
b''：帯筋外面までのコアコンクリートの幅
s_h：帯筋間隔



D.C.Kent and R.Park, Flexural Members with Confined Concrete, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol.97, ST7, July 1971, pp.1976~1990

圧縮応力ブロックパラメータ: α、γ

■コンクリートの圧縮合力:

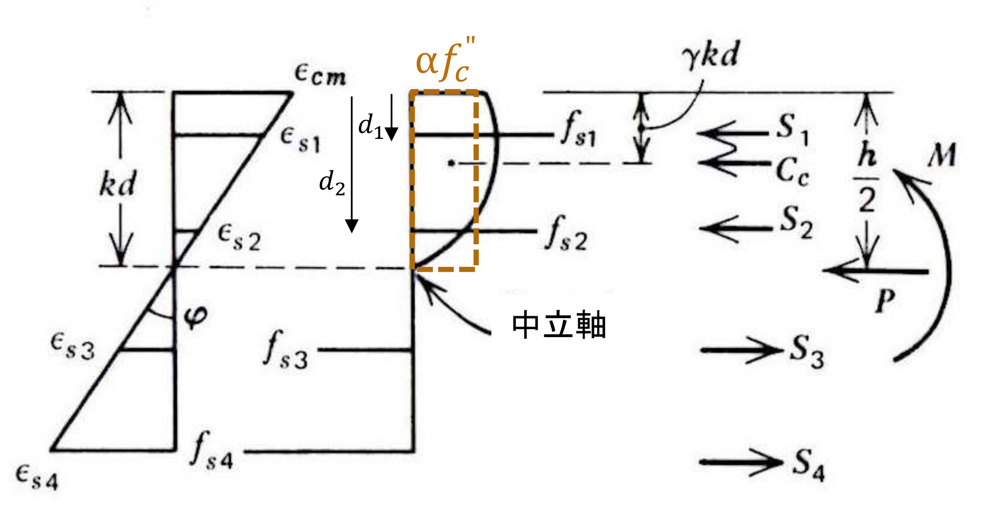
$C_c = \alpha f_c^{"} bkd$

■圧縮最外縁からの作用位置:

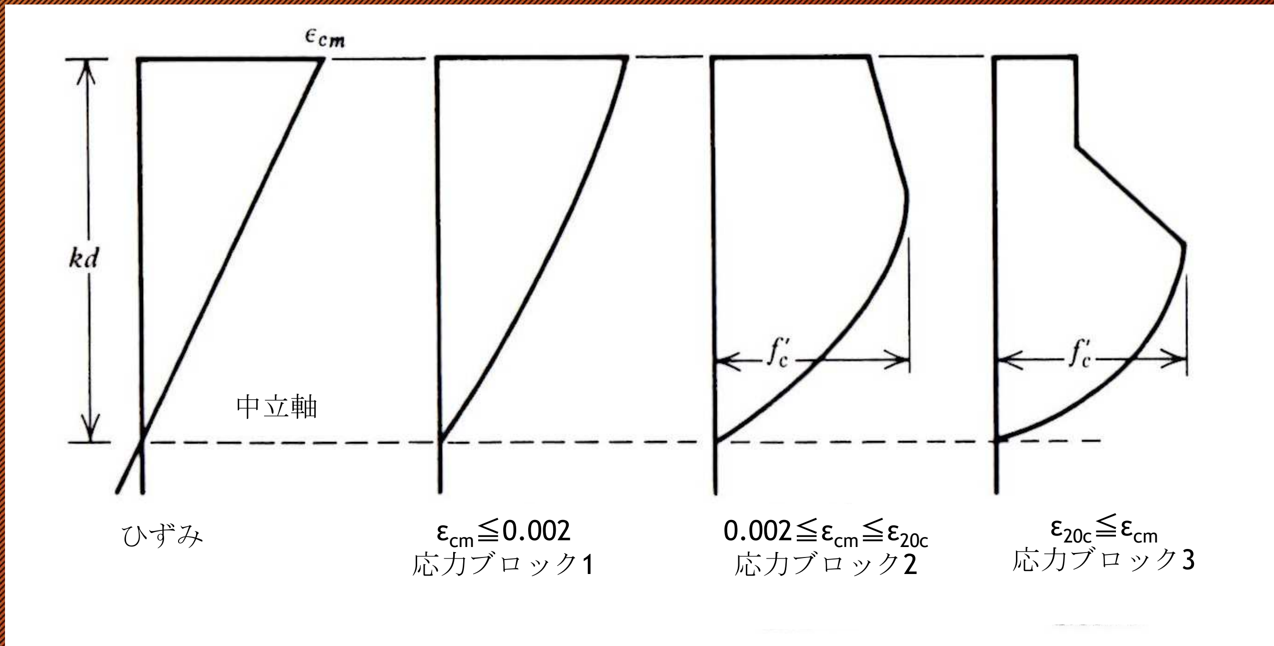
γkd

$$\alpha = \frac{\int_0^{\varepsilon_{cm}} f_c \, d\varepsilon_c}{f_c^{"} \varepsilon_{cm}}$$

$$\gamma = 1 - \frac{\int_0^{\varepsilon_{cm}} f_c \varepsilon_c \, d\varepsilon_c}{\varepsilon_{cm} \int_0^{\varepsilon_{cm}} f_c \, d\varepsilon_c}$$



Kent & Parkモデルによる圧縮応力ブロックの形状



設計基準での曲げ靭性の取扱い

土木学会＆鉄道標準:降伏点

- 降伏時部材角:$\theta_y = \theta_{y0} + \theta_{y1}$

$$\theta_{y0} = \delta_{y0}/L_a$$

δ_{y0}:部材降伏時の躯体変位

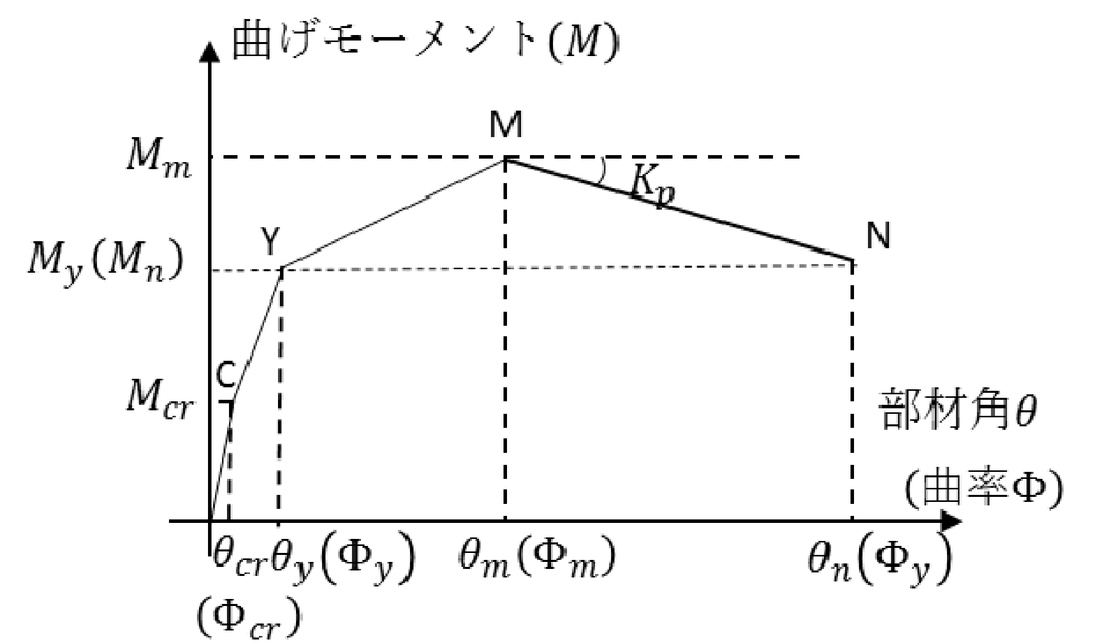
L_a:せん断スパン

θ_{y1}:軸鉄筋の抜け出しによる回転角

- 曲率への変換

$$\varphi_{y0} = \theta_{y0}/L_p$$

L_p:塑性ヒンジ長



土木学会＆鉄道標準：最大モーメント点

- 最大モーメント時部材角：$\theta_m = \theta_{m0} + \theta_{m1}$

$\theta_{m0} = \delta_{m0}/L_a$

$\delta_{m0} = \delta_{mb} + \delta_{mp}$

δ_{mb}：塑性ヒンジ部以外の曲げ変形による変位

δ_{mp}：塑性ヒンジ部の曲げ変形による変位

$$\delta_{mp} = \theta_{mp} \cdot (L_a - L_p/2)$$

- θ_{mp}：塑性ヒンジ部の回転角

$$\theta_{mp} = (0.021k_{w0} \cdot p_w + 0.013)(0.79p_t + 0.153)$$

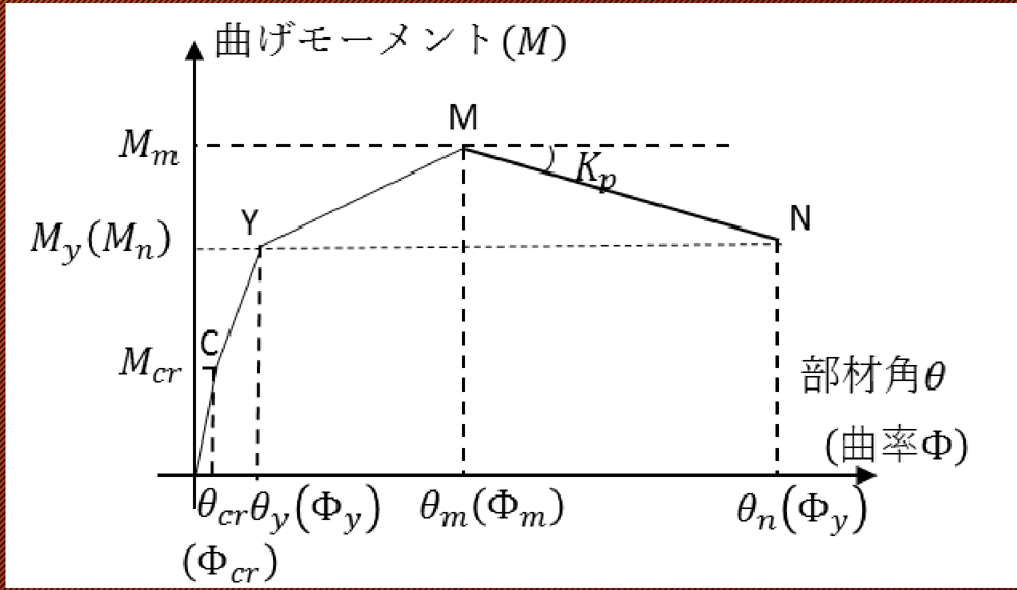
ただし、

$$0.021k_{w0} \cdot p_w + 0.013 \leq 0.04$$

$$0.79p_t + 0.153 \geq 0.78$$

- L_p：塑性ヒンジ長

$$L_p = 0.5d + 0.05L_a\text{（土木学会）、}L_p = D\text{（鉄道標準）}$$



土木学会＆鉄道標準：最大耐荷力以降の軟化域

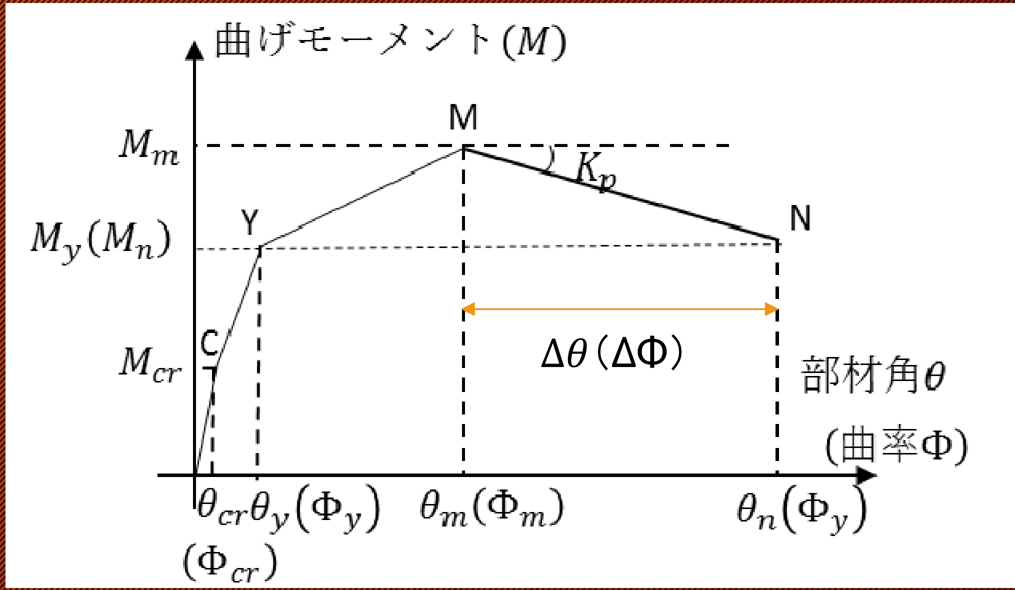
- $\Delta\theta = \eta\left(\frac{M_m - M_n}{M_m}\right)$

  $\Delta\theta$：θ_mからの回転角の増分

  η：一般に0.1としてよい

  M_m：最大曲げモーメント

  M_n：一般にM_yとしてよい

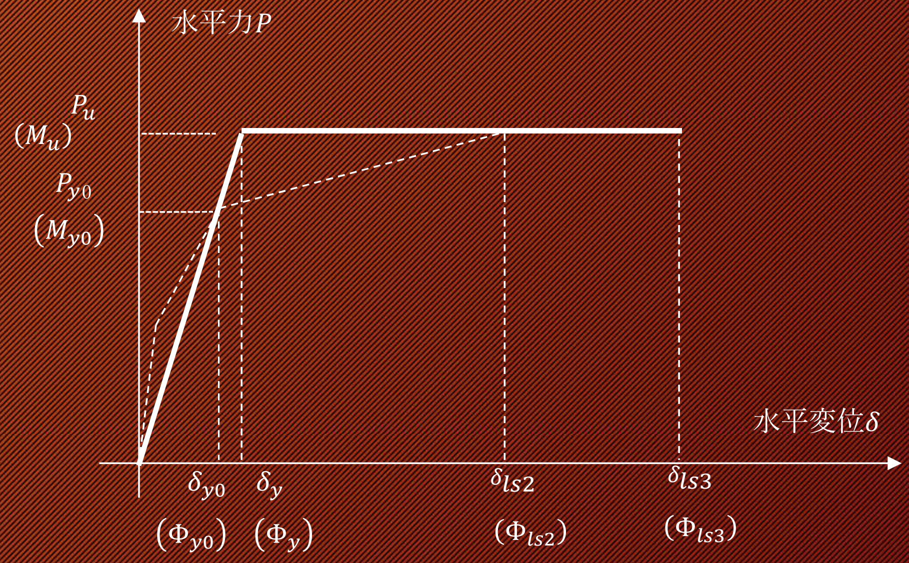


道路橋示方書:初降伏限界点

- 初降伏限界点

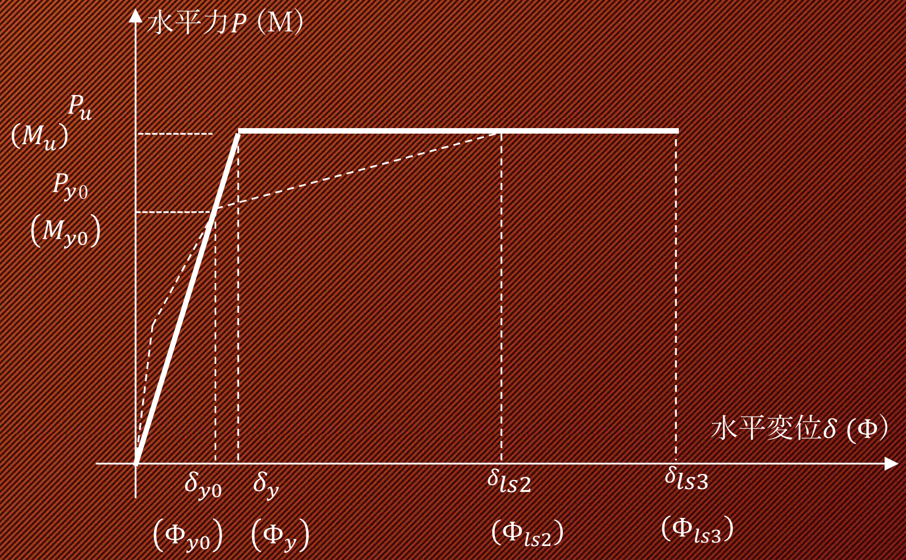
$$P_{y0} = \frac{M_{y0}}{h}$$

M_{y0}:最外縁軸方向鉄筋が降伏する時の橋脚基部断面の曲げモーメント



道路橋示方書：降伏限界点

- $P_y = P_u = \frac{M_{ls2}}{h}$
- $\delta_y = \frac{M_{ls2}}{M_{y0}} \delta_{y0}$
- M_{ls2}：耐震性能2の限界状態における橋脚基部断面の曲げモーメント



道路橋示方書：耐震性能2の限界点

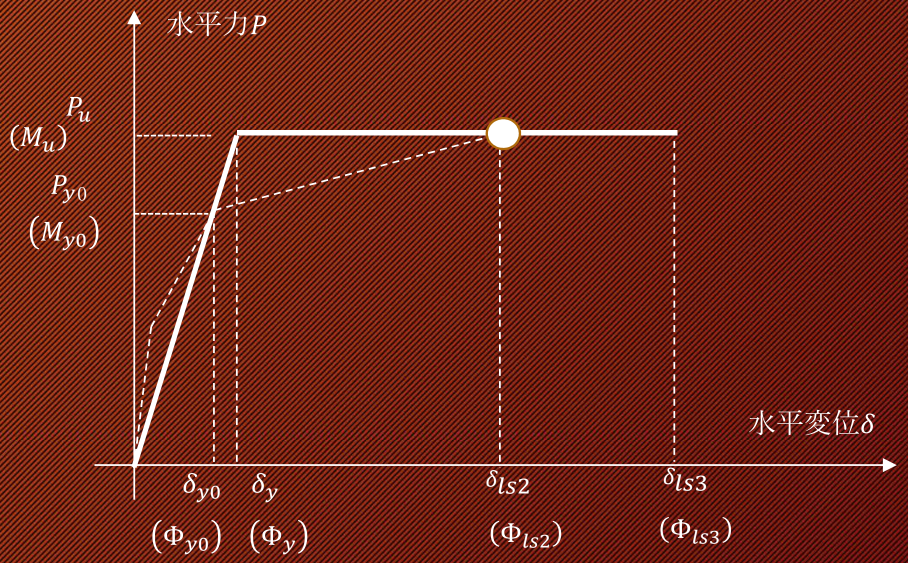
- $\delta_{ls2} = \delta_y + (\Phi_{ls2} - \Phi_y)L_p(h - L_p/2)$

- Φ_{ls2}：橋脚基部断面における耐震性能2の限界状態に相当する許容曲率

（軸方向鉄筋の引張ひずみが許容引張ひずみに達するとき、または最外縁の軸方向圧縮鉄筋位置にあるコンクリートの圧縮ひずみが限界圧縮ひずみに達するとき）

- Φ_y：橋脚基部断面における降伏曲率(1/mm)

$$\Phi_y = \left(\frac{M_u}{M_{y0}}\right)\Phi_{y0}$$



※耐震性能2とは、損傷が限定的なものに留まり、橋としての機能回復が速やかに行い得る性能

道路橋示方書：許容引張ひずみと圧縮限界ひずみ

■ε_{ccl}：横拘束筋で拘束されたコンクリートの限界圧縮ひずみ

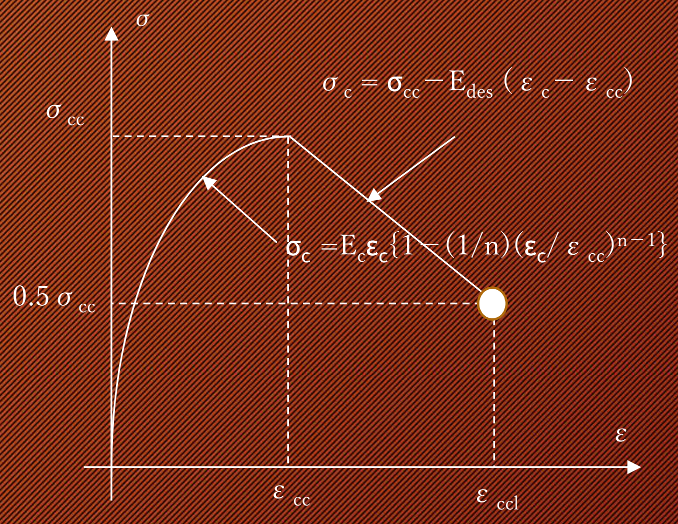
■耐震性能2の軸方向鉄筋の許容引張ひずみ

$\varepsilon_{st2} = 0.025 \cdot L_p^{0.15} \emptyset^{-0.15} \beta_s^{0.2} \beta_{c0}^{0.22}$

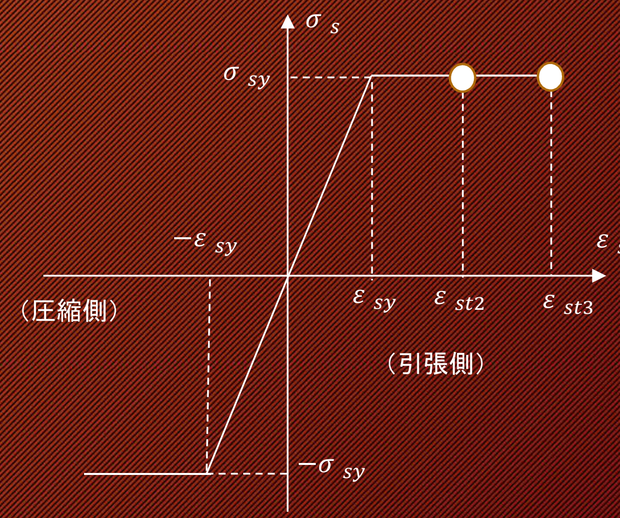
■耐震性能3の軸方向鉄筋の許容引張ひずみ

$\varepsilon_{st3} = 0.035 \cdot L_p^{0.15} \emptyset^{-0.15} \beta_s^{0.2} \beta_{c0}^{0.22}$

(a)コンクリート



(b)鉄筋

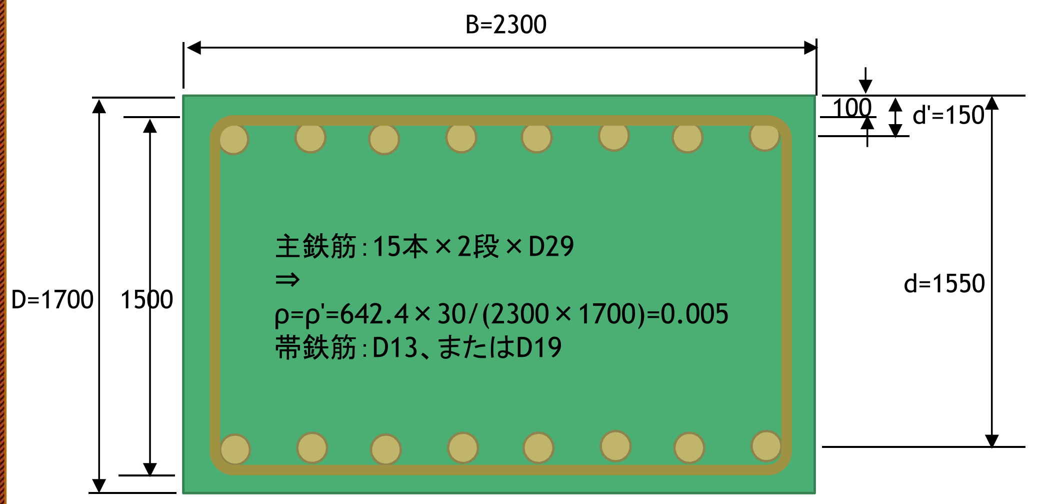


※耐震性能3とは、損傷が橋として致命的とならない性能

靭性に関する設計基準評価式の比較

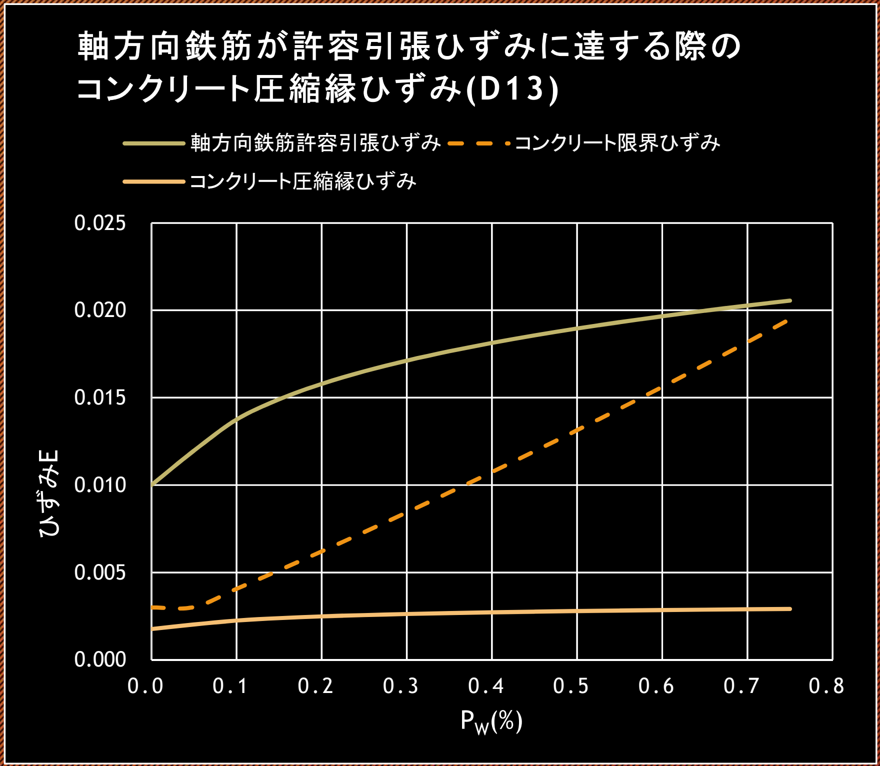
対象橋脚一単独柱※)

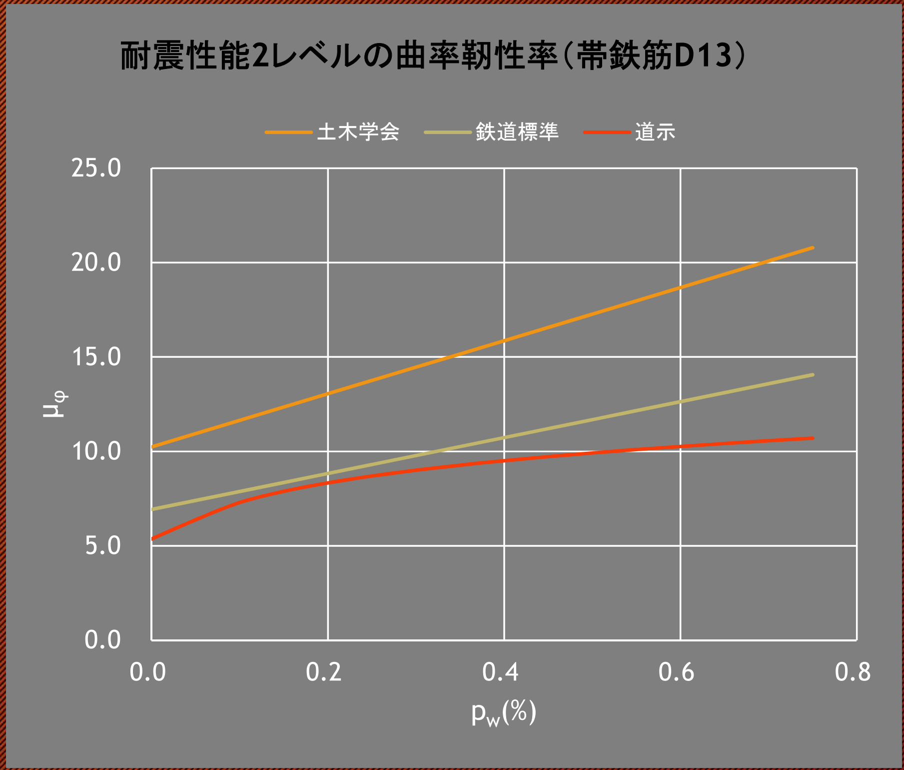
■柱高さ：L_a=7500mm
■軸力：軸力：σ_0/f_c'=0.057
■コンクリート：f_c'=20.6N/mm^2
■鉄筋：f_y=300N/mm^2、
　Es=2×10^{5}N/mm^2、
　E_s/E_c=10
■計算仮定
　1)降伏時のコンクリートは弾性
　2)終局強度時は長方形応力ブロックが成立



※既設道路橋の耐震補強に関する参考資料；(社)日本道路協会、平成9年8月

耐震性能2レベルの曲率靭性率(D13)



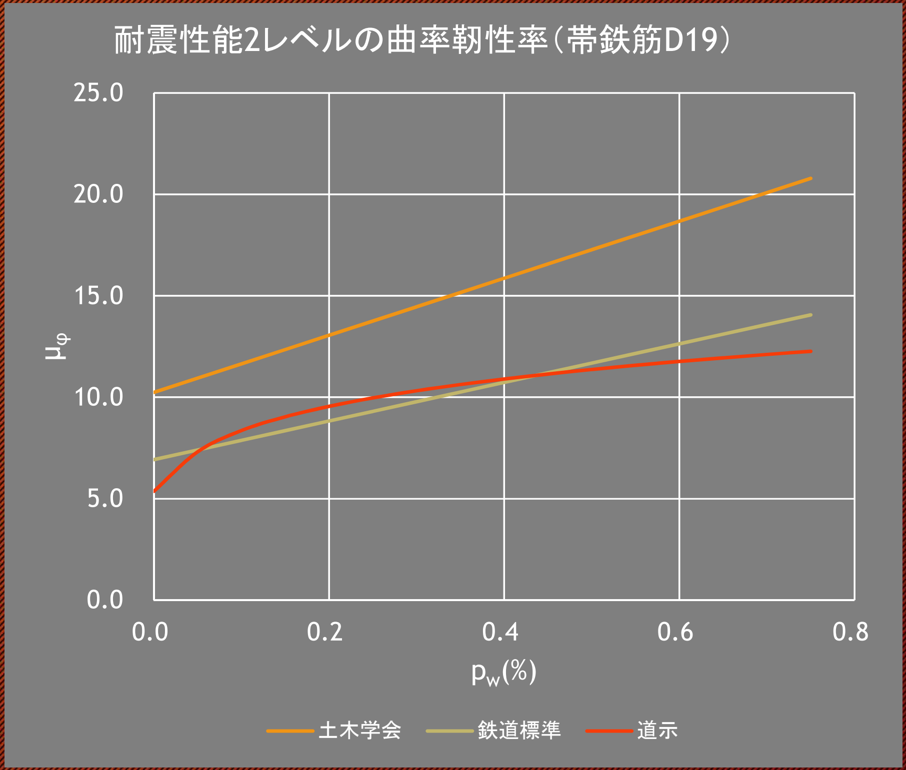


耐震性能2レベルの曲率靭性率(D19)

■耐震性能2レベルの曲率靭性について土木学会、鉄道標準、道示の評価式を比較（土木学会、鉄道標準はモーメント最大点での曲率）

■土木学会と鉄道標準曲率靭性はp_wに対して線形関係
■土木学会と鉄道標準の差は塑性ヒンジ長による

■鉄道標準と道示は類似
■道示のは軸方向鉄筋の引張許容ひずみで決まる
■道示の非線形性は塑性ヒンジ長、軸方向鉄筋、横拘束筋やかぶり拘束の影響が非線形として現れる



道示ー耐震性能2＆3レベルの曲率靭性率