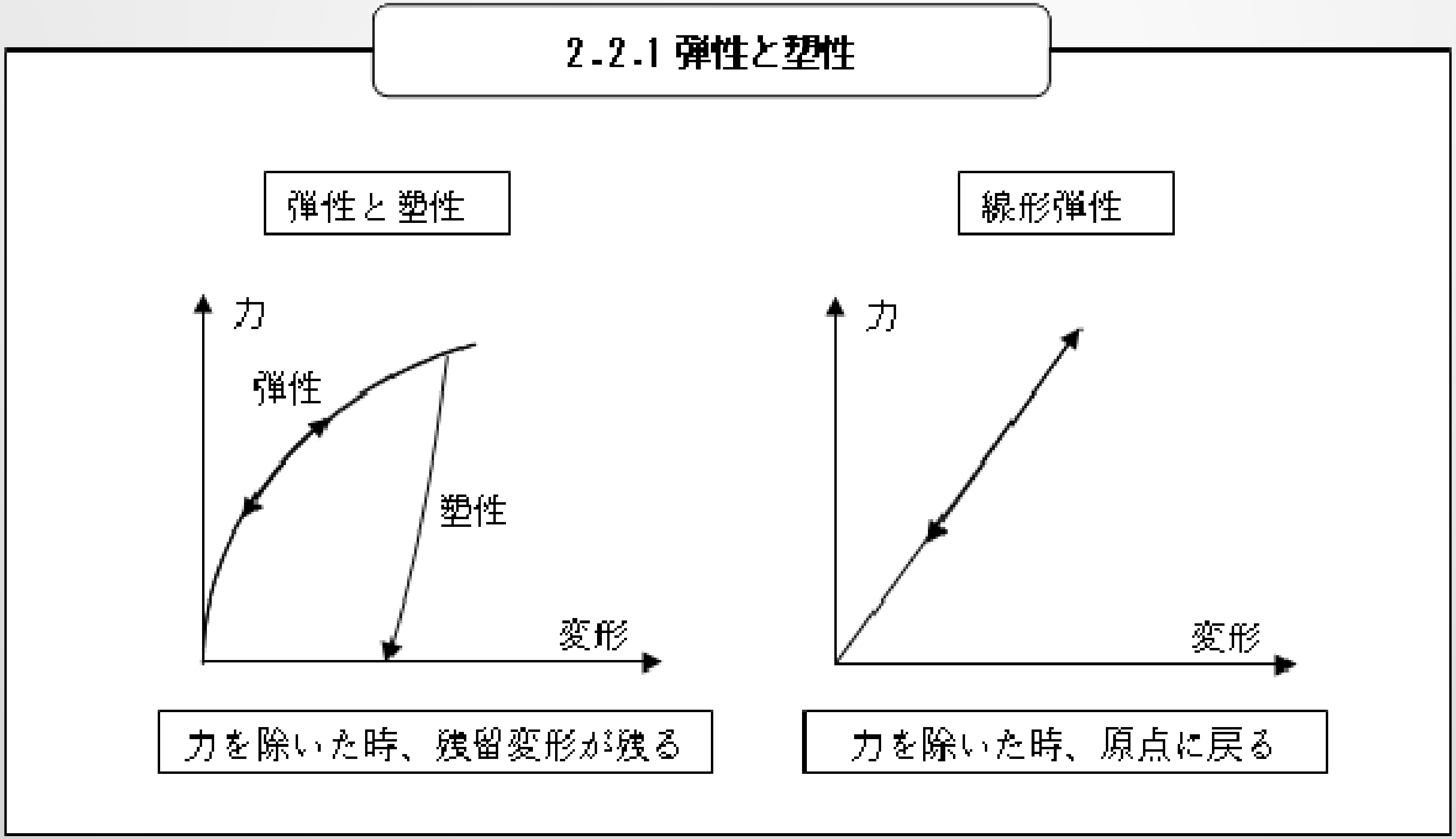
2.2 応力と断面力

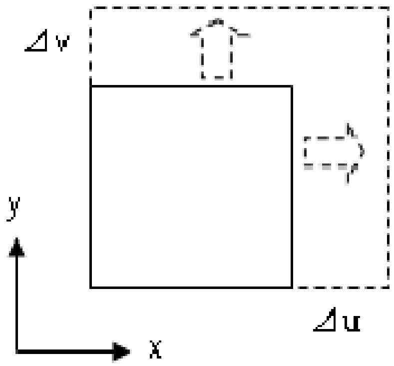
弾性応力とひずみ

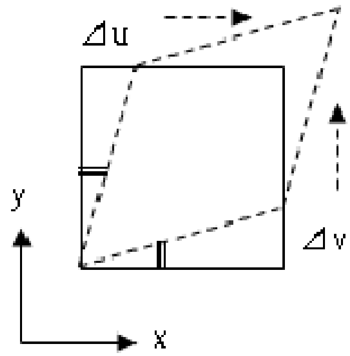


2.2.1 弾性と塑性
弾性と塑性
力
弾性
塑性
変形
力を除いた時、残留変形が残る
線形弾性
力
変形
力を除いた時、原点に戻る

弾性応力とひずみ

2.2.2 ひずみ





●直ひずみ

$\varepsilon_x = \partial u / \partial x$

$\varepsilon_y = \partial v / \partial y$

●せん断ひずみ

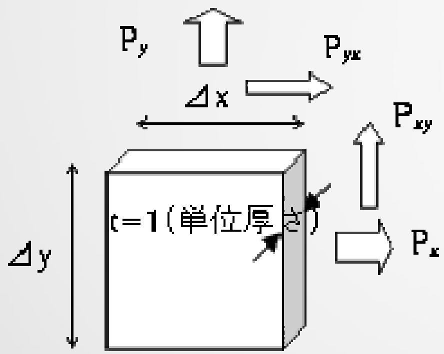
$\gamma_{xy} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x$

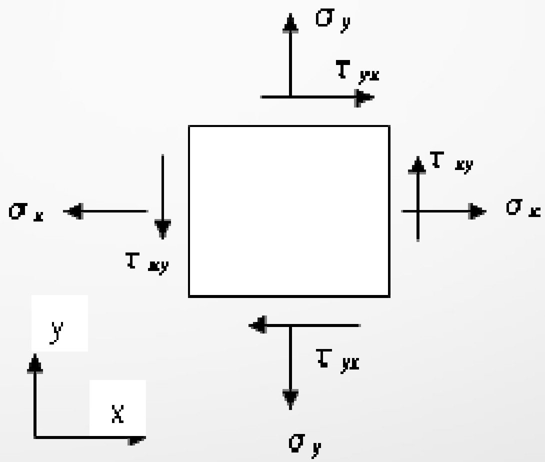
要点

- 変形には、伸び・縮みとゆがみがある。
- 変位の変化率をひずみという。
- 伸び・縮み→直ひずみ　ゆがみ→せん断ひずみ

弾性応力とひずみ

2.2.3 応力





●直応力

$\sigma_x = P_x/(t\Delta y) = P_x/\Delta y$

$\sigma_y = P_y/(t\Delta x) = P_y/\Delta x$

●せん断応力

$\tau_{xy} = P_{xy}/(t\Delta y) = P_{xy}/\Delta y$

$\tau_{yx} = P_{yx}/(t\Delta x) = P_{yx}/\Delta x$

要点

- 応力（度）とは、単位面積当たりに作用する力。
- 断面に作用する直交方向応力を直応力、接線方向応力をせん断応力という。

弾性応力とひずみ

2.2.4 応力とひずみ（平面応力）

［**前提条件**］

●フックの法則

ひずみは応力に比例

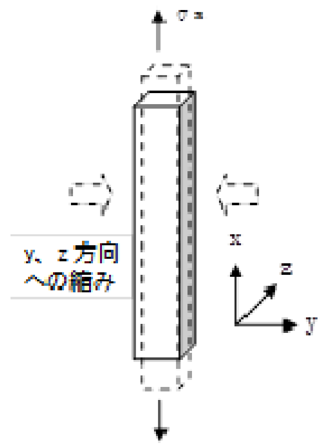
→ $\varepsilon_x = \sigma_x / E$　E：弾性係数（ヤング係数）

●ポアソン効果

ポアソン比分だけ直交方向にひずみが生じる

→ $\varepsilon_y = -\nu\ \sigma_x / E$　、$\varepsilon_z = -\nu\ \sigma_x / E$

（ν：鉄0.3、コンクリート1/12～1/6）



●応力によって生じるひずみ

$\varepsilon_x = (1/E)(\sigma_x - \nu\ \sigma_y)$

$\varepsilon_y = (1/E)(-\nu\ \sigma_x + \sigma_y)$

従って、

$\varepsilon_x + \nu\ \varepsilon_y = [(1-\nu^2)/E]\ \sigma_x$

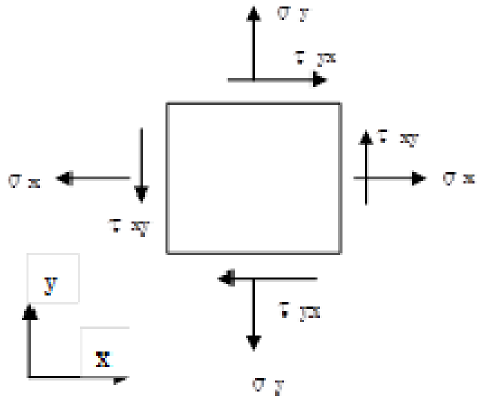
→　$\sigma_x = [E/(1-\nu^2)](\varepsilon_x + \nu\ \varepsilon_y)$

　　$\sigma_y = [E/(1-\nu^2)](\nu\ \varepsilon_x + \varepsilon_y)$

●せん断応力とせん断ひずみ

$\gamma_{xy} = \tau_{xy}/G$　または、$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$

ここに、$G = E/2(1+\nu)$；せん断弾性係数



弾性応力とひずみ

2.2.5 ２軸＆１軸応力−ひずみ関係

●２軸（平面応力場）の応力−ひずみ関係

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [E/(1-\nu^2)] \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

●1 軸応力場の応力−ひずみ関係

$\varepsilon_x = (1/E)(\sigma_x - \nu\ \sigma_y) = \sigma_x/E$

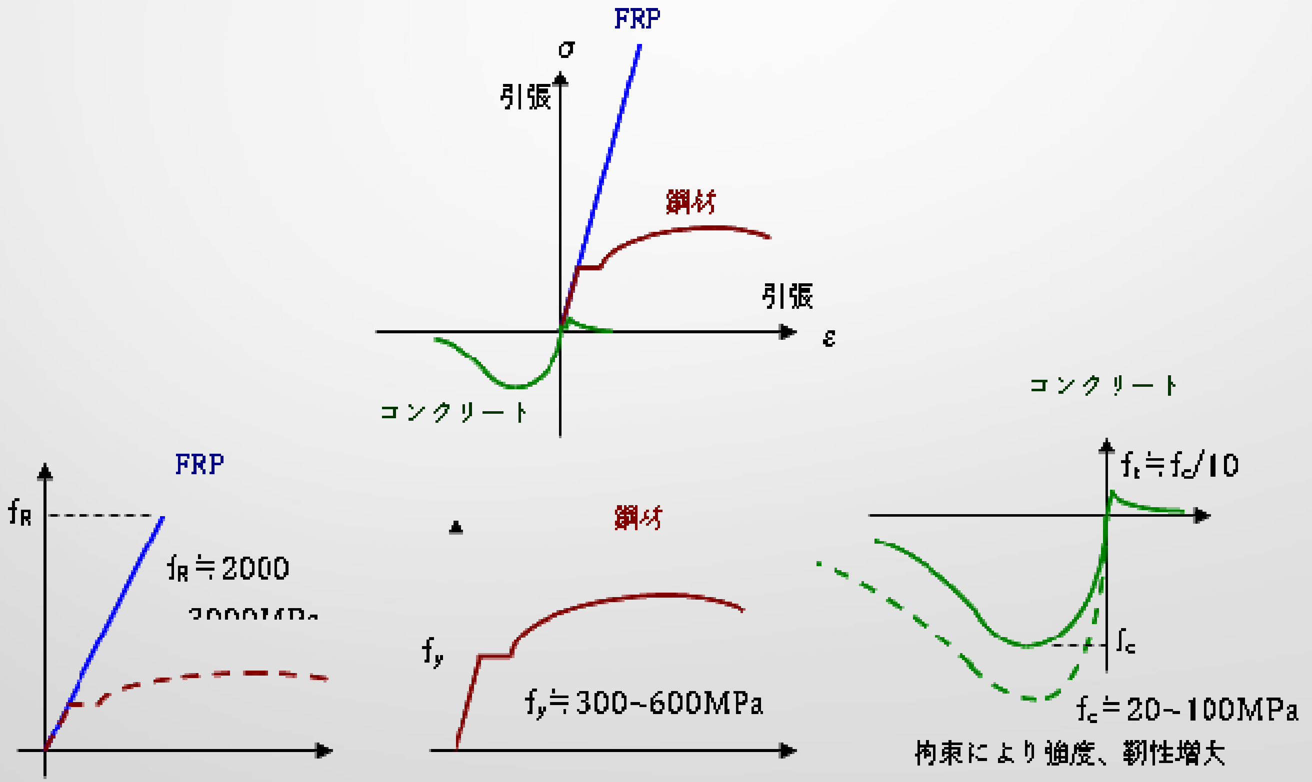
$\because \sigma_y = 0$

書き換えると、$\sigma_x = E\varepsilon_x$

弾性応力とひずみ

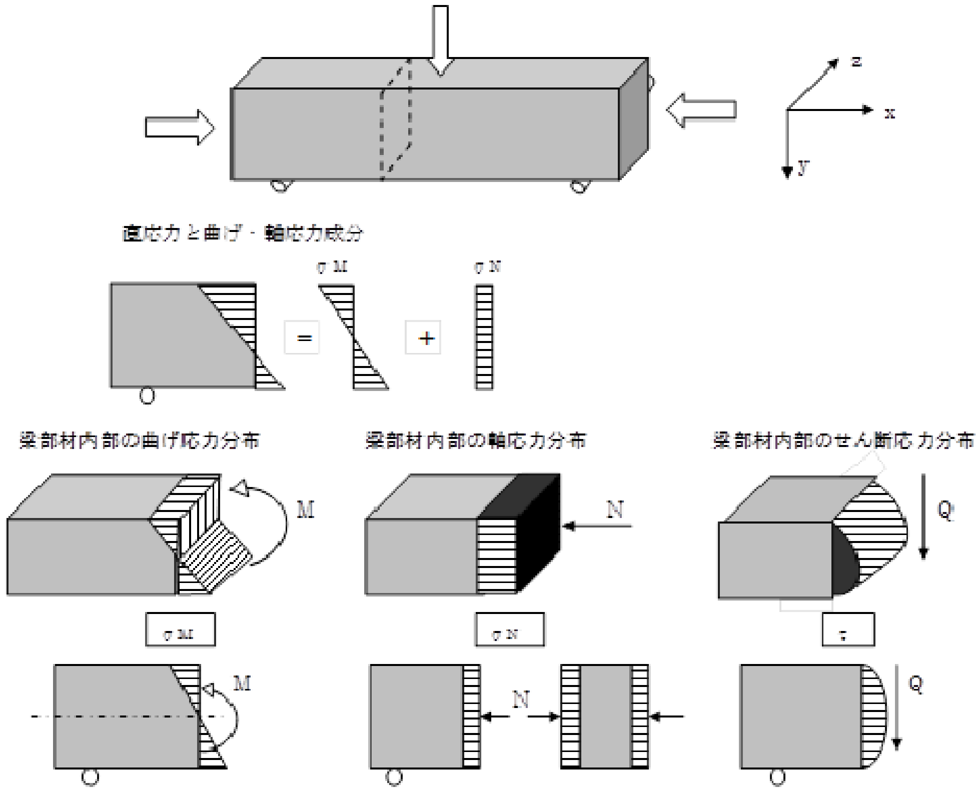
参考：なぜ応力とひずみが必要？

1）耐久性と安全性および経済性を考慮して材料を選定し、構造設計する。
2）材料を選定するにはその特性を知っておくことが必要
3）材料の力学特性を表すのは応力ーひずみ関係



断面力と断面の性質

2.3.1 応力と断面力



■断面力と応力の関係

$M=\int \sigma_M \times y\,dA=\int \sigma \times y\,dA=\int \sigma_M \times y\,dA+\int \sigma_N \times y\,dA=\int \sigma_M \times y\,dA+0$

$N=\int \sigma_N dA=\int \sigma dA=\int \sigma_M dA+\int \sigma_N dA=0+\int \sigma_N dA$

$Q=\int \tau\,dA$

■ 直応力（面に直角）

$\sigma=\sigma_M+\sigma_N$

■ せん断応力

（面に平行）：τ

断面力：断面図心位置で定義する応力の合力

梁の軸方向応力

2.4.1 梁の軸方向応力

●w：たわみ、たわみ角 $\theta = \partial w/\partial x$

● 平面保持の仮定(Bernouliiの仮定)

「部材軸への直交面は変形後も直交かつ平面を保つ」

→ $u = u_0 - \theta z$

ここに、u_0：軸線位置での伸び

●ひずみ

$$\varepsilon_x = \partial u/\partial x = \partial (u_0 - \theta z)/\partial x$$
$$= \partial u_0/\partial x - (\partial \theta/\partial x)\, z$$
$$= \partial u_0/\partial x - (\partial^2 w/\partial x^2)\, z$$
$$= \varepsilon_{x0} + \phi_x z$$

ここに、

$\phi_x = -\partial^2 w/\partial x^2$：曲率（z軸の正側に凸になるものが正）

ε_{x0}：部材軸ひずみ

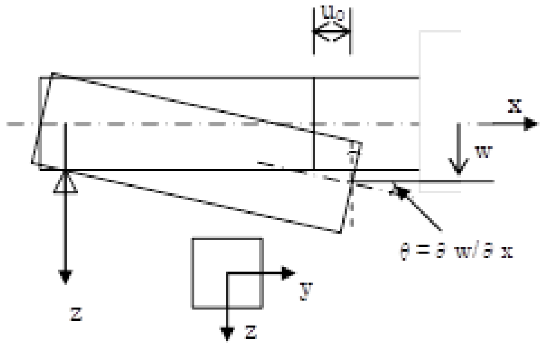
●曲げひずみ＝図心軸からの距離×曲率

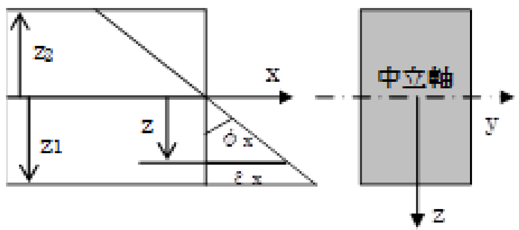
●中立軸：曲げひずみが０となる軸

●軸方向応力

$$\sigma_x = [E/(1-\nu^2)](\varepsilon_x + \nu\,\varepsilon_z)$$
$$= [E/(1-\nu^2)](\varepsilon_x - \nu^2\varepsilon_x)$$
$$= E\varepsilon_x = \boxed{E(\varepsilon_{x0} + \phi_x z)}$$

$\because\ \sigma_y = 0$、$\varepsilon_z = -\nu\,\varepsilon_x$





断面力とひずみ

2.4.2 曲げモーメントと曲げ応力

$$
\begin{aligned}
M_x &= \int \sigma_x z \, dA \\
&= \int \boxed{E(\varepsilon_{x0} + \phi_x z)} z \, dA \\
&= E\varepsilon_{x0} \int z \, dA + E\phi_x \int z^2 \, dA \\
&= E\varepsilon_{x0} S_y + E I_y \phi_x = E I_y \phi_x
\end{aligned}
$$

∵　x軸を図心軸にとると、

$S_y = 0, \int z^2 \, dA = I_y$

断面2次モーメント

$\phi_x = M_x / EI_y$　（EI_y：曲げ剛性）

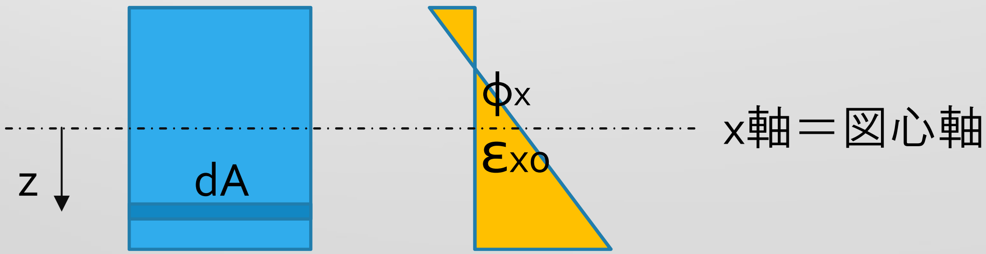
2.4.3 軸力と軸応力度

$$
\begin{aligned}
N_x &= \int \sigma_x \, dA \\
&= \int \boxed{E(\varepsilon_{x0} + \phi_x z)} \, dA \\
&= E\varepsilon_{x0} \int dA + E\phi_x \int z \, dA \\
&= E A \varepsilon_{x0}
\end{aligned}
$$

∵　$S_y = \int z \, dA = 0$

断面1次モーメント

$\varepsilon_{x0} = N_x / EA$　（EA：軸剛性）



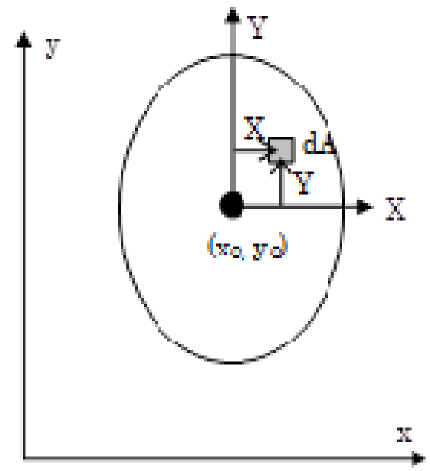
任意座標軸周りの断面１次モーメント

2.3.2 任意座標軸周りの断面１次モーメント

●断面１次モーメント

　断面積A、単位厚さを有する物体の任意座標軸(x,y)周りの断面１次モーメントは、

$$\left.\begin{aligned} &x\text{軸周り}：S_x = \int y\,dA = \int y\,dx\,dy \\ &y\text{軸周り}：S_y = \int x\,dA = \int x\,dx\,dy \end{aligned}\right\}$$



断面２次モーメント

2.3.4 断面2次モーメント

●断面2次モーメント

x軸周り：

$I_x = \int y^2 dA = \int y^2 dxdy$

$= \int (Y + y_0)^2\, dxdy$

$= \int Y^2\, dxdy + 2\, y_0 \int Y\, dxdy + \int y_0^2\, dxdy$

$= I_X + 2\, y_0\, S_Y + y_0^2 A$

(X,Y)座標の原点は図心であることからS_Y=0となり、上式は以下のようになる。

$I_x = I_X + y_0^2 A$

y軸周り：

同様にして、

$I_y = \int x^2 dA = \int x^2 dxdy$

$= I_Y + x_0^2 A$

●断面相乗モーメント

x,y軸周り：

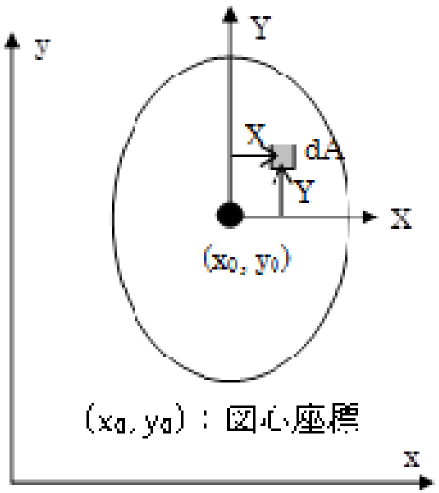
$I_{xy} = \int xydA = \int xydxdy$

$= \int (X + x_0)\ (Y + y_0) dA$

$= \int X\, YdA + x_0 \int Y\, dA + y_0 \int X\, dA + x_0\, y_0 \int dA$

$= I_{XY} + x_0\, S_X + y_0\, S_Y + x_0 y_0 A$

$= I_{XY} + x_0 y_0 A$



断面力による応力

2.4.4 合応力

$\sigma_x = E(\varepsilon_{x0} + \phi_x z)$
$= E(N_x/EA + z M_x/EI_y)$
$= N_x/A + (M_x/I_y) z$

←

$\phi_x = M_x/EI_y$
$\varepsilon_{x0} = N_x/EA$
を代入

断面力と断面の性質

参考：なぜ断面力？

1）応力での定式化は取扱いが煩雑になる
2）応力分布が仮定できると任意点の応力が定義できる
3）断面内応力の合力として断面力が定義できると取扱いが容易になる
4）すなわち部材任意点での断面力が分れば応力も算定できる

↓

1）応力　ひずみ関係より応力はひずみで定義できる
2）ひずみ分布が仮定できると応力および断面力が定義できる
3）ひずみ分布と断面力を結びつけるのは断面の性質（断面形状）
4）断面の性質を表わす代表的なものとして以下がある

$A=\int dA$（断面積）　$S=\int y\,dA$（断面１次モーメント）　$I=\int y^2 dA$（断面２次モーメント）

図心軸周りの断面１次モーメント

2-3-3 図心軸周りの断面１次モーメント

●図心位置座標；(x_0, y_0)

●図心軸周りの断面１次モーメント；$S_X=0,\ S_Y=0$

$$S_X = \int (y-y_0)dA = \int y\,dA - \int y_0 dA = \int y\,dA - y_0 A = 0$$

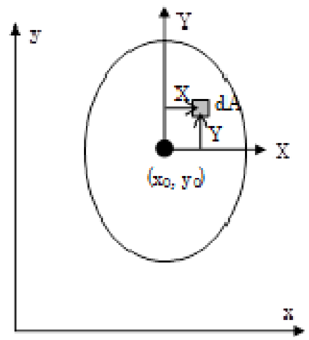
$$S_Y = \int (x-x_0)dA = \int x\,dA - \int x_0 dA = \int x\,dA - x_0 A = 0$$

$$\therefore\ x_0 = \int x\,dA/A = S_y/A$$

$$y_0 = \int y\,dA/A = S_x/A$$

● 図心から (e_x, e_y) の距離を有する座標軸周りの断面１次モーメント

$$\left.\begin{array}{l} S_x = e_y A \\ S_y = e_x A \end{array}\right\}$$



●任意の複数形状から構成される物体断面の断面１次モーメント

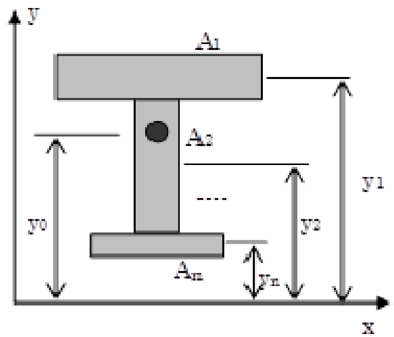
● 断面積：A_1, A_2,------, A_n

x軸までの距離：y_1, y_2,------, y_n

●断面１次モーメント

$$S_x = \Sigma A_i y_i$$

$$y_0 = S_x/A = \Sigma A_i y_i / \Sigma A_i$$



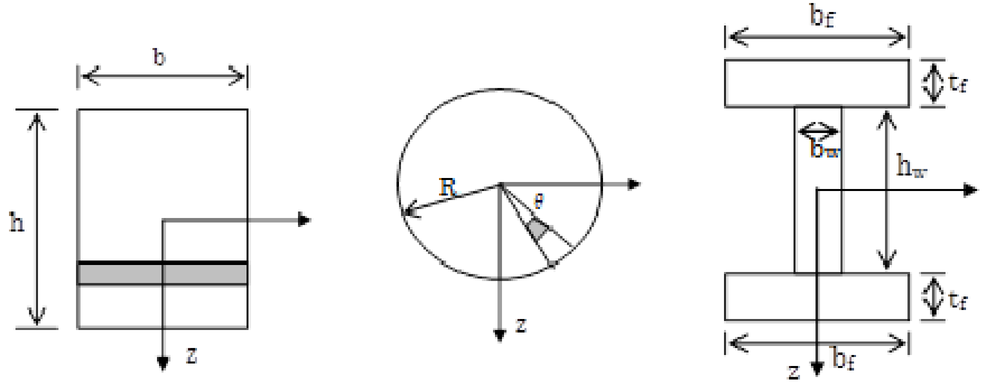
要点

1) 任意の直交座標軸での図心位置は断面１次モーメントを断面積で割った値として得られる。

2) 対称軸を有する断面では図心は対称軸線上にある

断面２次モーメントと断面係数

2.4.6 代表断面の断面２次モーメントと断面係数



a)長方形断面　b)円形断面　c) I 形断面

● 長方形断面

$I = \int z^2\, dA = \int b z^2\, dz = b[(h/2)^3 - (-h/2)^3]/3 = bh^3/12$

$W = I/(h/2) = (bh^3/12)/(h/2) = bh^2/6$

● 円形断面

$I = \int z^2\, dA = \int (r \sin\theta)^2\, r\, d\theta\, dr$

$= \int r^3\, dr \times \int \sin^2\theta\, d\theta = (1/4) R^4 \times \int [(1-\cos 2\theta)/2] d\theta$

$= (1/4) R^4 \times [(2\pi/2) - \int \cos 2\theta\, d\theta] = \pi R^4/4$

$W = I/R = (\pi R^4/4)/(R) = \pi R^3/4$

● I 形断面

$I = 2A_f (h_w/2 + t_f/2)^2 + 2b_f t_f^3/12 + I_w = t_f b_f (h_w + t_f)^2/4 + b_f t_f^3/6 + b_w h_w^3/12$

$= (t_f b_f/12)[3(h_w + t_f)^2 + 2t_f^2] + b_w h_w^3/12 = (t_f b_f/12)(3h_w^2 + 6t_f h_w + 5t_f^2) + b_w h_w^3/12$

$W = I/(h_w/2 + t_f) = [t_f b_f (3h_w^2 + 6t_f h_w + 5t_f^2) + b_w h_w^3]/(6h_w + 12t_f)$

図心軸周りの断面２次モーメント

2.3.5 図心軸周りの断面２次モーメント

●$I_X = \int Y^2 \, dXdY$
●$I_Y = \int X^2 dXdY$
●$I_{XY} = \int XYdXdY$

要点

断面２次モーメントは図心軸周りが最小であり、これらから離れるに従い偏心距離の２乗分だけ増加していく

断面力2次モーメントと曲げ応力

要点

- フランジ部（縁部）面積が大きい程断面２次モーメント、断面係数は大きくなる。その結果、曲げ応力を小さくすることが出来る。
- 言い換えると、I型断面は、同じ曲げモーメントに対し少ない断面積で抵抗できる。